Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Аналитический синтез комбинационных автоматов

д.т.н. В.С. Выхованец

http://valery.vykhovanets.ru

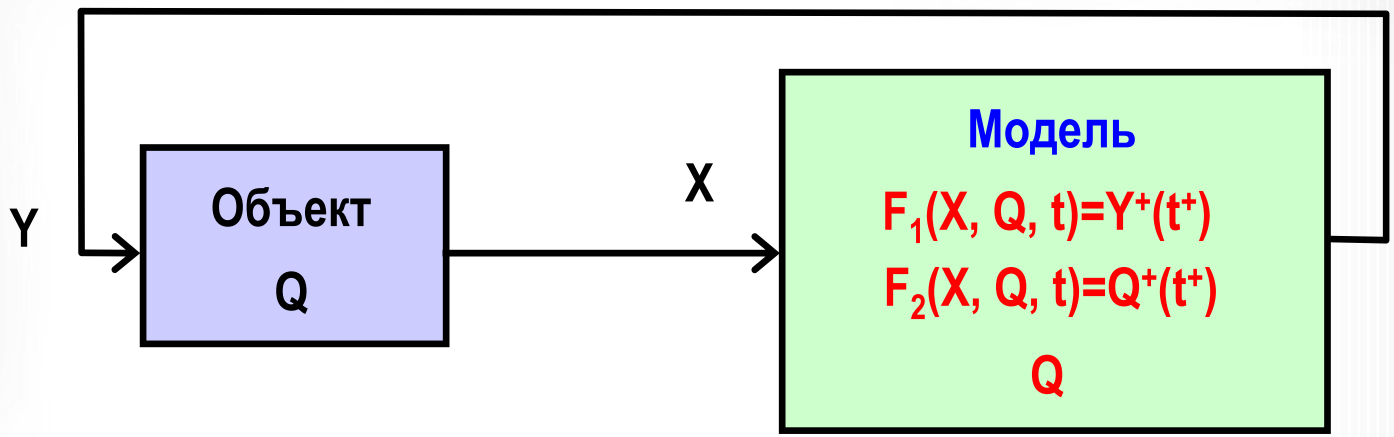
3 апреля 2012 г.

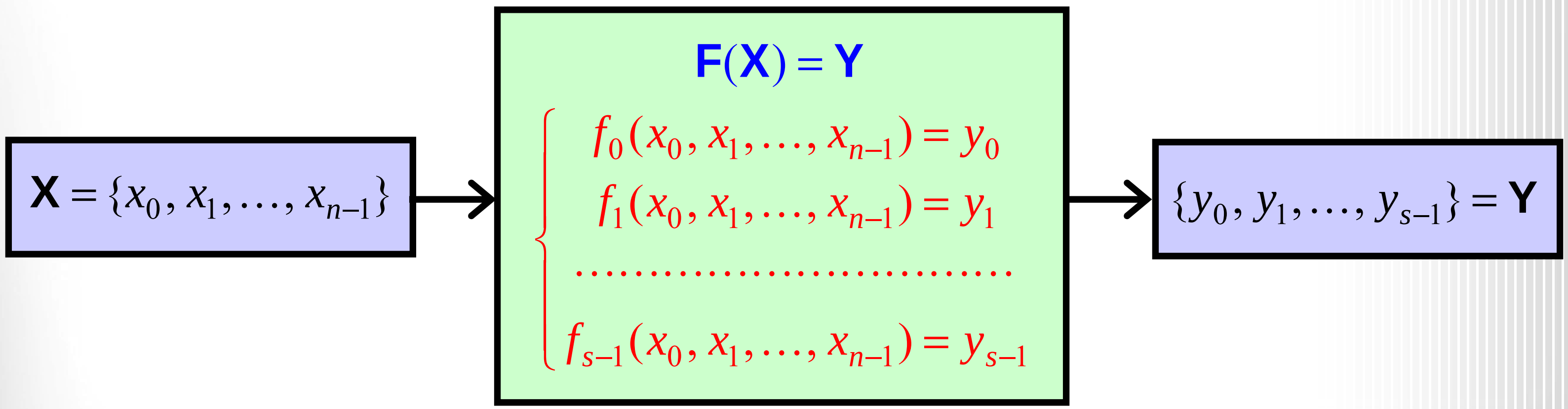
МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ИУЗ

План доклада

- Постановка задачи
- Основные определения
- Метод 1 – алгебраические построения
- Метод 2 – спектральные разложения
- Метод 3 – аналитический синтез
- Демонстрационные примеры
- Оценки – сходимость и сложность
- Выводы
- Дальнейшие исследования

Дискретные модели





Дискретные функции

$$N_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

$$f(x): N_{k_x} \to N_{k_f}$$

$$f(x_0, x_0, \ldots, x_{n-1}): N_{k_0} \times N_{k_1} \times \ldots \times N_{k_{n-1}} \to N_{k_f}$$

x	$f(x)$
0	f_0
1	f_1
…	…
k-1	f_{k-1}

x_0	x_1	…	x_{n-1}	$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$
0	0	…	0	f_0
1	0	…	0	f_1
…	…	…	…	…
k_0-1	k_1-1	…	k_{n-1}-1	f_{k-1}

Примеры дискретных функций

x	$f(x)$
0	1
1	0
2	1
3	0

$x \in N_4, \quad N_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$f(x) \in N_2, \quad N_2 = \{0, 1\}$

$f(2) = 1$

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	2
0	2	0	1
1	2	0	1
0	0	1	2
…	…	…	…
1	2	3	0

$f(1, 1, 0) = 2$

Дискретные операции

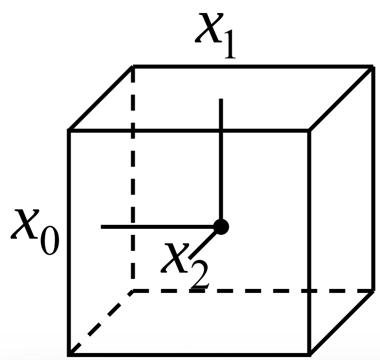
Унарные

$$
\begin{array}{cc}
 & \\
0 & \\
1 & \\
\vdots & \\
k_0-1 &
\end{array}
x_0
\begin{bmatrix} o_0 \\ o_1 \\ \vdots \\ o_{k_0-1} \end{bmatrix} = o_{x_0}
$$

Бинарные

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & & x_1 & \\
 & 0 & 1 & \dots & k_1-1 \\
\hline
0 & o_{00} & o_{01} & \cdots & o_{0,k_1-1} \\
1 & o_{10} & o_{11} & \cdots & o_{1,k_1-1} \\
x_0 \quad \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
k_0-1 & o_{k_0-1,0} & o_{k_0-1,1} & \cdots & o_{k_0-1,k_1-1}
\end{array}
= o_{x_0 x_1}
$$

Тернарные



$= o_{x_0 x_1 x_2}$

Примеры дискретных операций

Унарная

$$x\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{array} = \neg x$$

$$\neg 1 = 2$$

Бинарная

$$\begin{array}{cc} & x_1 \\ x_0 & \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \end{array} = x_0 \oplus x_1$$

$$1 \otimes 1 = 0$$

Тернарная

$$x_0\,?\,x_1 : x_2 = \begin{cases} x_1, & x_0 \neq 0 \\ x_2, & x_0 = 0 \end{cases}$$

$$1?0:1=0$$

Алгебраические построения

$?x_0 \,\&\, ?x_1 \,\&\, ?x_2 = 1$

x_0	x_1	x_2	f
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

$$\neg = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \& = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vee = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(X) &= x_0 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \,\vee \\ &\vee\; x_0 \,\&\, x_1 \,\&\, \neg x_2 \,\vee \\ &\vee\; x_0 \,\&\, x_1 \,\&\, x_2 \end{aligned}$$

$$x \,\&\, y = y \,\&\, x, \quad x \vee y = y \vee x$$

$$x \,\&\, (y \,\&\, z) = x \,\&\, (y \,\&\, z)$$
$$x \vee (y \vee z) = x \vee (y \vee z)$$

$$x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$$
$$x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$$

$$x \vee \neg x = 1, \quad x \,\&\, 1 = x$$

$$f(X) = x_0 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \;\vee\; x_0 \,\&\, x_1$$

Алгебраический подход

- Необходимость исследования функционально полных множеств операций и выявления их свойств
- Отсутствие единого подхода к синтезу формульных представлений дискретных функций
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом возможных преобразований
- Ограниченное число исследованных функционально полных базисов операций

Спектральные разложения

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \times h_i$$

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(X) \times h_i$$

$$g_i(X) = g_{iX}, \quad X \in N_m, \quad m = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$$

$$\begin{array}{c c} X & \begin{array}{cccc} g_0(X) & g_1(X) & \ldots & g_{m-1}(X) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} g_{00} & g_{10} & \cdots & g_{m-1,0} \\ g_{01} & g_{11} & \cdots & g_{m-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{0,m-1} & g_{1,m-1} & \cdots & g_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c c} i & h_i \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} h_0 \\ h_0 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} X & f(X) \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \times \mathbf{H} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{D} \times \mathbf{F} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{G}^{-1}$$

Спектральный базис

$$f(X)=\sum_{i=0}^{m-1} g_i(X)\times h_i$$

$$X=[x_0\ x_1],\quad k_0=2,\quad k_1=3,\quad m=k_0k_1=6,\quad k_f=3$$

$$+=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\quad \times=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}\quad \otimes=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}\quad *=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcc|ccc}
 & & & X & x_0 & x_1 \\
g_0 & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\
g_1 & = & x_0 & 1 & 1 & 0 \\
g_2 & = & x_1 & 2 & 0 & 1 \\
g_3 & = & x_0\times x_1 & 3 & 1 & 1 \\
g_4 & = & x_0\otimes x_1 & 4 & 0 & 2 \\
g_5 & = & x_1 * x_0 & 5 & 1 & 2
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
g_0\ g_1\ g_2\ g_3\ g_4\ g_5\\
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\1&1&2&2&2&1\end{bmatrix}^{-1}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
d_0\ d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5\\
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\2&0&1&0&0&0\\1&2&2&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}
\end{array}$$

Спектральная декомпозиция

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad * = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} g_0 & = & 1 \\ g_1 & = & x_0 \\ g_2 & = & x_1 \\ g_3 & = & x_0 \times x_1 \\ g_4 & = & x_0 \otimes x_1 \\ g_5 & = & x_1 * x_0 \end{array}
\quad
\begin{array}{ccc} X & x_0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{array}
\begin{array}{c} d_0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
\times
\begin{array}{c} X \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} f \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{c} i \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} h \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$f(x_0, x_1) = x_0 + x_0 \times x_1 + x_1 * x_0 \times 2$$

Спектральный подход

- Необходимость предварительного синтеза формул спектральных функций
- Необходимость проверки совместимости спектральных функций (вычисление определителей)
- Необходимость вычисления обратных функций (обращение матриц)
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом спектральных базисов

Аналитический синтез

Формула общего вида в базисе унарных и бинарных операций с произвольной расстановкой скобок

$$\Phi \rightarrow \Delta \mid \mathrm{X} \mid \Xi\Phi \mid (\Phi\Theta\Phi)$$

Φ - формула, Δ - константа, X - переменная,
Ξ - унарная операция, Θ - бинарная операция.

$$(\neg_0 x_0 \otimes_0 (\neg_1 x_1 \otimes_1 (\neg_2 x_2 \otimes_2 \neg_3 (x_1 \otimes_3 2))))$$

Канонический вид формул, эквивалентный формулам общего вида

$$\Phi \rightarrow \Delta \mid \Xi\mathrm{X} \mid \Psi;$$

$$\Psi \rightarrow \mathrm{X} \mid (\mathrm{X}\Theta\Psi) \mid ((\mathrm{X}\Theta\Psi)\Theta\Psi)$$

Ψ - каноническая подформула

$$((x_1 \otimes_0 (x_0 \otimes_1 x_2)) \otimes_2 x_1)$$

Задача аналитического синтеза

$$\begin{cases} \text{var } \Theta; \\ \min \Theta. \end{cases}$$

Представления функций

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	2
1	1	0	1
0	2	0	0
1	2	0	1
0	0	1	1
…	…	…	…
1	2	3	2

$\mathbf{X} = [x_0\ x_1\ x_2]$, $\mathbf{K} = [234]$, $\mathbf{F} = [0121011\ldots2]$

Редукция представлений

$\mathbf{X}=[\underbrace{x_0\ x_1}_{[x_0x_1]}\ x_2],\quad \mathbf{K}=[\underbrace{323}_{k_0k_1k_2}],\quad \mathbf{F}=[011101102010201020]$

Классы эквивалентности строк

$$k_0k_1\left\{\begin{array}{c}[x_0x_1]\\ \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}\end{array}\right. \quad \begin{array}{c} x_2 \\ \underbrace{\begin{bmatrix}0&6&12\\1&7&13\\2&8&14\\3&9&15\\4&10&16\\5&11&17\end{bmatrix}}_{k_2}\end{array}, \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{array}{c}[x_0x_1]\\ \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}\end{array} \quad \begin{array}{c}x_2\\ \begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&0\\1&2&1\\1&0&0\\0&1&2\\1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$C_0=\{0,4\}$

$C_1=\{1,3,5\}$

$C_2=\{2\}$

$\downarrow$

$k=3$

Значность редукции

$\Psi \qquad \otimes_0$

$$f(\mathbf{X})=x_0\ \begin{array}{c}x_1\\ \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\2&1\end{bmatrix}\\ \otimes_1\end{array}\ \begin{array}{c}x_2\\ \begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\\ \otimes_0\end{array},$$

$f(\mathbf{X})=\Psi(x_0,x_1)\otimes_0 x_2$

$f(\mathbf{X})=(x_0\otimes_1 x_1)\otimes_0 x_2$

$f(1,1,1)=0$

Циклическая перестановка

$$\mathbf{X}=[x_0\ x_1\ x_2\ x_3],\quad \mathbf{K}=[2223],\quad \mathbf{F}=[011120202022010020210202]$$

$[x_0\ x_1\ x_2\ x_3]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Покрытие 12

$[x_3\ x_0\ x_1\ x_2]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

Покрытие 18

$[x_2\ x_3\ x_0\ x_1]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

Покрытие 18

$[x_1\ x_2\ x_3\ x_0]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

Покрытие 16

$$\mathbf{X}=[x_3\ x_0\ x_1\ x_2],\quad \mathbf{K}=[3222],\quad \mathbf{F}=[022100122121200012200002]$$

Остаточный вектор

$\mathbf{X} = [x_3\ x_0\ x_1\ x_2]$, $\mathbf{K} = [3222]$, $\mathbf{F} = [022100122121200012200002]$

$$\begin{array}{ccc} [x_3 x_0 x_1] & & x_2 \\ \left[\begin{array}{c} 1\\0\\0\\2\\1\\1\\1\\0\\0\\2\\0\\1 \end{array}\right] & & \left[\begin{array}{cc} 0&2\\2&0\\2&0\\1&0\\0&1\\0&2\\1&2\\2&0\\2&0\\1&0\\2&0\\1&2 \end{array}\right] \\ \Psi_0 & & \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x_2 \\ \left[\begin{array}{cc} 2&0\\0&2\\1&0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 0\\1\\2 \end{array} \Bigg\} k=3 \\ \otimes_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x_2 \\ \left[\begin{array}{cc} 0&2\\2&0\\2&0\\1&0\\0&2\\0&2\\0&2\\2&0\\2&0\\1&0\\2&0\\0&2 \end{array}\right] \\ \mathbf{F}_0 \end{array}$$

$f(\mathbf{X}) = f_0(\mathbf{X}) \oplus f_1(\mathbf{X})$,

$< N_{k_f}, \oplus >$ - группоид с обратной операцией $\ominus$ (сумма по модулю 3)

$$\begin{array}{rl} \mathbf{F} &= [022100122121200012200002] \\ \mathbf{F}_0 &= [022100022120200022200002] \\ \ominus & \\ \hline \mathbf{F}_1 &= [000000100001000020000000] \end{array}$$

$f(\mathbf{X}) = (\Psi_0(\mathbf{X}_0) \otimes_0 x_2) \oplus f_1(\mathbf{X})$

$\otimes_0 = \left[\begin{array}{cc} 2&0\\0&2\\1&0 \end{array}\right]$ $\mathbf{X}_0 = [x_3\ x_0\ x_1]$, $\mathbf{K}_0 = [322]$, $\Psi_0 = [100211100201]$

$\mathbf{X} = [x_3\ x_0\ x_1\ x_2]$, $\mathbf{K} = [3222]$,

$\mathbf{F}_1 = [000000100001000020000000]$

Многошаговое приближение

$$\mathbf{X}=[x_3\ x_0\ x_1\ x_2],\ \mathbf{K}=[3222],\ \mathbf{F}_1=[000000100001000020000000]$$

$$\begin{array}{cccc}
[x_3x_0x_1] & & & \\
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&2\\0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&2\end{bmatrix} \\ \otimes_1 \end{array} &
\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&2\\0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix} \\
\Psi_1 & \mathbf{F}_1 & & \mathbf{F}_2
\end{array}$$

$$f(\mathbf{X})=f_0(\mathbf{X})\oplus f_1(\mathbf{X}),$$
$$f_1(\mathbf{X})=f_2(\mathbf{X})\oplus f_3(\mathbf{X})$$

$$\begin{array}{rl}
 & \mathbf{F}_1=[000000100001000020000000] \\
 & \mathbf{F}_2=[000000100001000020000000] \\
\ominus & \hline
 & \mathbf{F}_3=[000000000000000000000000]
\end{array}$$

$$f(\mathbf{X})=(\Psi_0(\mathbf{X}_0)\otimes_0 x_2)\oplus(\Psi_1(\mathbf{X}_1)\otimes_1 x_2)$$

$$\otimes_0=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\\1&0\end{bmatrix} \qquad \otimes_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_0=[x_3\ x_0\ x_1],\ \mathbf{K}_0=[322] \qquad \mathbf{X}_1=[x_3\ x_0\ x_1],\ \mathbf{K}_1=[322]$$

$$\Psi_0=[100211100201] \qquad \Psi_1=[000200100001]$$

Рекурсия по глубине

$$f(\mathbf{X}) = (\Psi_0(\mathbf{X}_0) \otimes_0 x_2) \oplus (\Psi_1(\mathbf{X}_1) \otimes_1 x_2)$$

$$\begin{array}{cc} & x_3\,1 \\ x_1\,1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ & \otimes_{00} \end{array} \quad \begin{array}{c} x_0\,1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \otimes_{01} \end{array} \quad \begin{array}{c} x_2\,0 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \otimes_{0} \end{array} \quad \Psi_0(\mathbf{X}_0) \otimes_0 x_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \oplus$$

$$\begin{array}{cc} & x_0\,1 \\ x_3\,1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \otimes_{10} \end{array} \quad \begin{array}{c} x_1\,1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \otimes_{11} \end{array} \quad \begin{array}{c} x_2\,0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \otimes_{1} \end{array} \quad \Psi_1(\mathbf{X}_1) \otimes_1 x_2$$

$$f(1,1,0,1) = 2$$

$$f(\mathbf{X}) = (((x_1 \otimes_{00} x_3) \otimes_{01} x_0) \otimes_0 x_2) \oplus (((x_3 \otimes_{10} x_0) \otimes_{11} x_1) \otimes_1 x_2)$$

Нахождение группоида

$$f(\mathbf{X}) = f_0(\mathbf{X}) \oplus f_1(\mathbf{X})$$

Цель – ранжирование числа вхождений элементов N_{k_f} в остаточный вектор $\mathbf{F}_1$ и, возможно, понижение его значности.

$$\mathbf{F} = [01112020202201002021 0202]$$
$$\mathbf{F}_0 = [022100222122200022000000]$$

Матрица вхождения пар значений

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & f & \\ & & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 6 & 2 & 4 \\ f_0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 3 & 2 & 5 \end{array}$$

Строки $\oplus$ - перестановки N_{k_f}, переводящие строки матрицы вхождений в невозрастающие последовательности

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & f & \\ & & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 0 & 2 & 1 \\ f_0 & 1 & 0 & 1 & * \\ & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$\oplus$

Для найденной операции $\oplus$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} \ominus \mathbf{F}_0 = [022010000200110001011101]$$

0 – 13 вхождений
1 – 8 вхождений
2 – 3 вхождения

Для суммы по модулю 3

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} \ominus \mathbf{F}_0 = [022100122121200012200002]$$

0 – 10 вхождений
1 – 5 вхождений
2 – 9 вхождений

Демонстрационный пример

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846265$$

по модулю 3

$$\mathbf{X} = [x_0 x_1 x_2 x_3], \quad \mathbf{K} = [2223], \quad \mathbf{F} = [011120202022010020210202]$$

$$f(\mathbf{X}) = (((x_1 \otimes_0 x_2) \otimes_1 x_0) \otimes_2 x_3) \oplus (((x_1 \otimes_4 x_0) \otimes_5 x_3) \otimes_6 x_2)$$

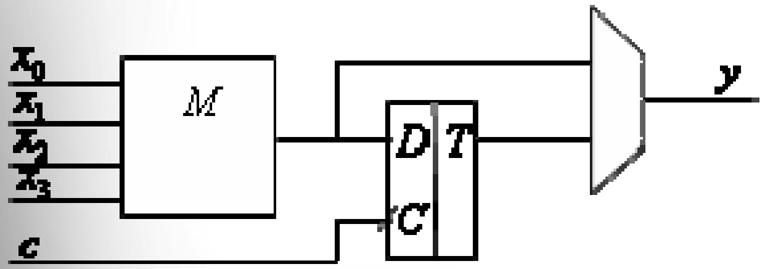
$$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\otimes_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \otimes_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \otimes_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\oplus = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Прикладной пример

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{01}	x_{23}	x_4	f
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	3	1	0	1
0	1	0	1	0	2	2	0	1
1	1	0	1	0	3	2	0	0
0	1	1	1	0	2	3	0	0
0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	2	0	1	1
1	1	0	0	1	3	0	1	0
1	1	1	0	1	3	1	1	1
0	0	0	1	1	0	2	1	1
1	1	0	1	1	3	2	1	1
1	0	1	1	1	1	3	1	0



$$f = \left(x_{01} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * \\ * & 1 & * & 0 \\ 1 & * & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix} x_{23} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_4$$

Оценка сложности

$$\mathbf{X}=[x_0x_1\ldots x_{n-1}],\quad \mathbf{K}=[kk\ldots k],\quad \mathbf{F}=[f_0f_1\ldots f_{m-1}].$$

$$t$$

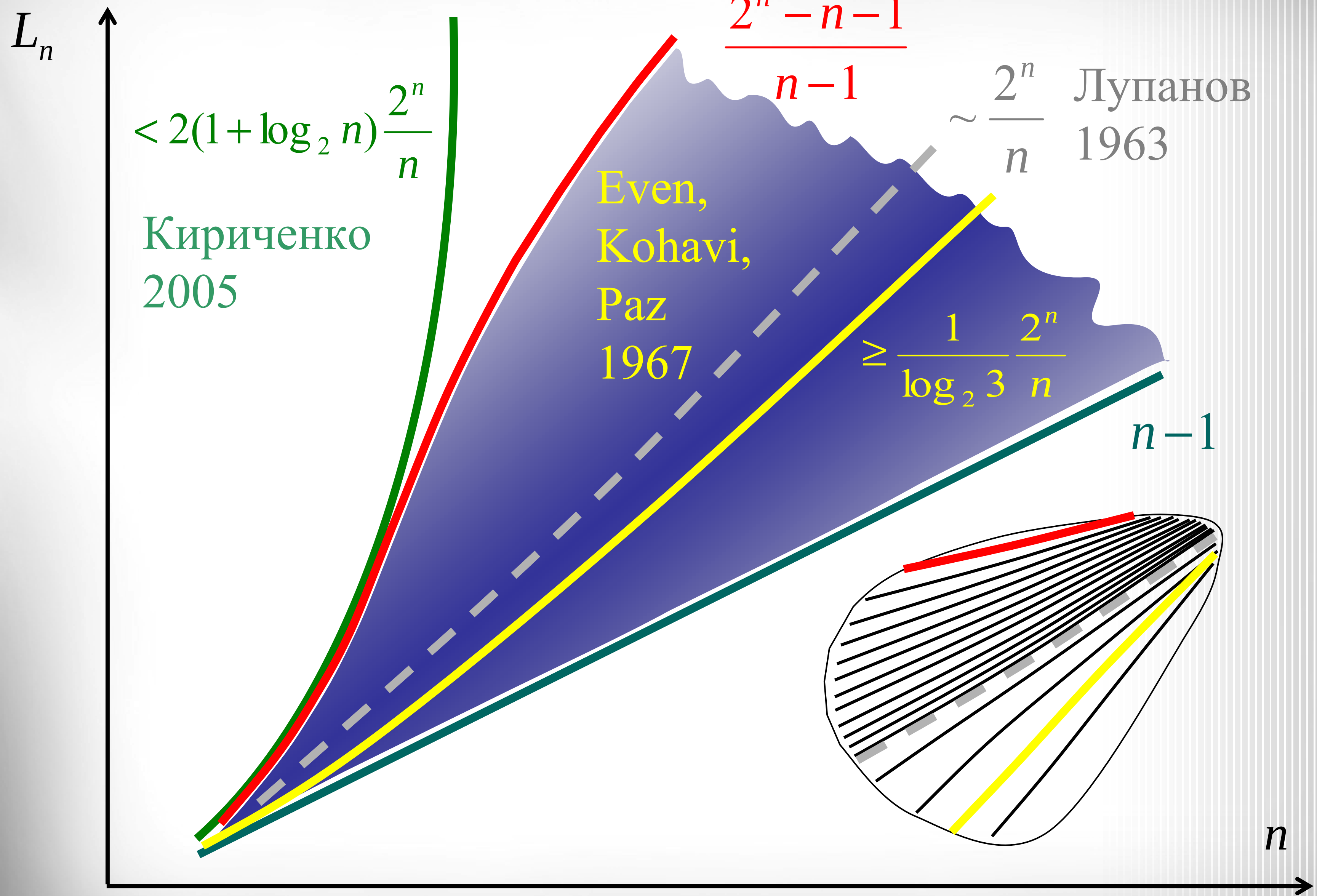
$$\Psi_0\to\underbrace{(\overbrace{(X_1\otimes_1\Psi_1)}\oplus_1(\overbrace{(X_2\otimes_2\Psi_2)}\oplus_2(\ldots\oplus_{t-1}\overbrace{(X_t\otimes_t\Psi_t)}\ldots)))}_{L_n}$$

$$t_{\max}=k\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$$

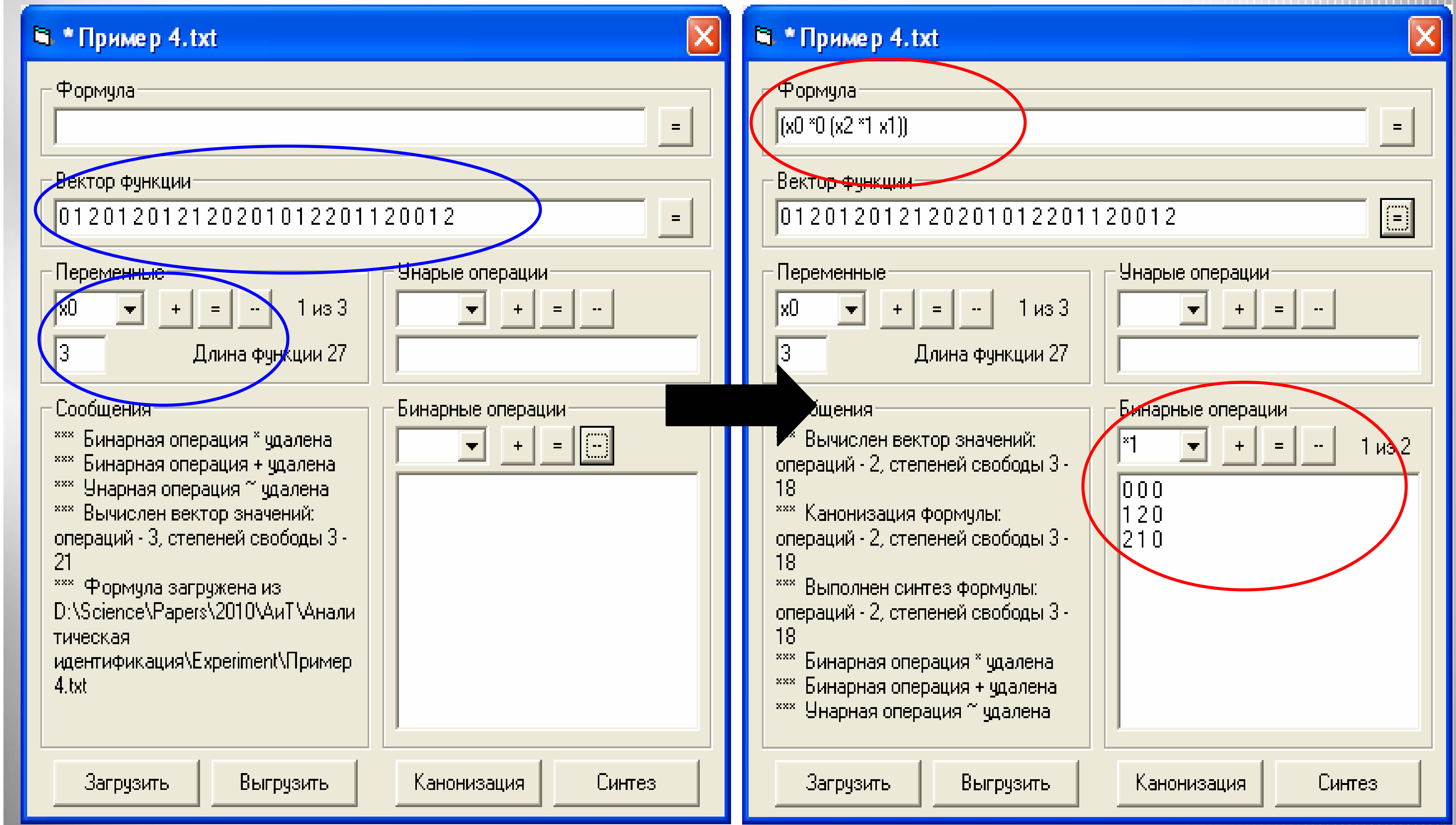
$$L_n(k)=\frac{2(k-1)^2+k}{k(k-1)^2}\frac{k^{n-1}}{n-1}-\frac{k}{(k-1)^2}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(k-1)}\frac{n-2}{n-1}-1$$

$$L_n(2)=\frac{2^n-n-1}{n-1},\qquad L_n(2)\sim\frac{2^n}{n}$$

Другие оценки



Программа синтеза формул



Выводы

- Исследованы известные методы синтеза формул дискретных функций: алгебраический, спектральный и новый аналитический
- Определены достоинства и недостатки каждого из перечисленных методов
- Показано, что наиболее эффективным является аналитический метод
- Найдены оценки максимальной сложности формул, синтезируемых аналитическим методом, которые оказались наилучшими

Дальнейшие исследования

- Минимизация комбинационных автоматов
- Совместная минимизация формул
- Табличная декомпозиция функций
- Сжатие сигналов и изображений
- Распараллеливание и конвейеризация
- Аналитическая идентификация объектов
- Оценка эффективности программ
- Прикладной анализ данных
- Архивация данных

Другие направления

- Аналитический синтез автоматов
- Интервальная динамическая логика
- Образующие алгебры в обработка сигналов
- Специальные спектральные функции
- Прикладной анализ текстов
- Контекстная технология программирования
- Моделирование бизнес-процессов
- Понятийный анализ проблемных областей
- Корпусное моделирование предметных областей