Труды III-й Российской конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ'2012, Москва). - М.: ИПУ РАН, 2012. - С. 461-465.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ

В.С. Выхованец, С.В. Федоров
Институт проблем управления РАН, Москва, Россия
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассмотрен новый метод синтеза схем из логических элементов, основанный на аналитическом синтезе формул в произвольном базисе бинарных операций с последующим преобразованием не базисных операций в базисные путем применения унарных операций. Приведен пример синтеза формулы не полностью определенной булевой функции. Показано, что в отличие от других известных методов синтеза формул, рассмотренный метод является асимптотически оптимальным. Приведен пример использования метода для реализации вычислений с использованием программируемых логических матриц.

Ключевые слова: дискретное устройство, комбинационная схема, синтез схем из логических элементов, базис логических элементов, аналитический синтез схем, оценки сложности схем.

Введение

Задача синтеза схем из логических элементов рассматривается многими авторами. Все изученные методы, как правило, сводятся к двум основным. В первом методе, называемом алгебраическим, в хорошо изученном базисе (алгебре) синтезируется формула реализуемой булевой функции, а затем выполняются ее тождественные преобразования для минимизации формулы (схемы) и (или) тождественных преобразований ее в другой тоже хорошо изученный базис [1]. Во втором методе, называемом спектральным, в заданном базисе операций синтезируется множество спектральных функций, после чего производится разложение заданной булевой функции в синтезированном базисе [2]. Как первый, так и второй метод достаточно трудоемки, так как требуют почти полного перебора вариантов тождественных преобразований (алгебраический метод) или обращения матриц большого размера (спектральный метод).

Известен также метод аналитического синтеза формул многозначных функций с различными значностями переменных, основанный на вычислении наилучшей формулы в произвольном базисе бинарных операций [3]. Однако в указанной работе не рассмотрена задача преобразования полученной формулы в заданный базис.

Настоящая работа посвящена методу аналитического синтеза, при котором вычисляется наилучшая формула в базисе, состоящем из всех возможных бинарных операций, а затем выполняются тождественные преобразования операций полученной формулы в операции заданного базиса путем применения унарных операций к их операндам и к самой операции.

1. Исходные данные для синтеза

Поставим задачу синтеза минимальной комбинационной схемы из логических элементов в базисе B, состоящем из логических элементов: инвертора, конъюнктора и сумматора по модулю 2, $B = \{\neg, \&, \oplus\}$. Пусть комбинационная схема задана не полностью определенной булевой функцией, представленной таблицей истинности (табл. 1).

2. Представление функции

Представим функцию из табл. 1 двумя векторами – вектором переменных $\mathbf{X}$ и вектором значений функции $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{X} = [x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4], \quad \mathbf{F} = [1{*}{*}{*}10{*}1{*}{*}10{*}{*}0{*}0{*}10{*}{*}{*}01{*}{*}1{*}0{*}{*}], \qquad (1)$$

где для обозначения векторов (упорядоченных множеств) применены квадратные скобки. В этом случае для нахождения значения функции по значению ее переменных используются следующие формулы:

$$f_q = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad q = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{X}(i) \cdot 2^i, \tag{2}$$

где f_q – q-ый элемент вектора $\mathbf{F}$, или значение функции f в точке q, в которой переменные $\mathbf{X}$ принимают значения $\mathbf{X}(i)$ соответственно, а i – порядковый номер переменной в векторе $\mathbf{X}$.

Таблица 1 – Не полностью определенная булева функция

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0

3. Перестановка переменных

Найдем вектор значений функции $\mathbf{F}'$ после перестановки переменных в $\mathbf{X}$. Не ограничивая общности, выполним циклическую перестановку переменных. Используя формулы (2) для двух рассматриваемых представлений функции и обеспечивая одинаковость значений функции при одних и тех же значениях переменных, из (1) получим

$$\mathbf{X} = [x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4], \quad \mathbf{F} = [1***10*1**10**0*0*10***01**1*0**];$$

$$\mathbf{X}' = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_0], \quad \mathbf{F}' = [10***1*01*0***10*1**1*01***00***];$$

$$\mathbf{X}'' = [x_2\ x_3\ x_4\ x_0\ x_1], \quad \mathbf{F}'' = [1*01*****11**0011***0**0*0**1*0*];$$

$$\mathbf{X}''' = [x_3\ x_4\ x_0\ x_1\ x_2], \quad \mathbf{F}''' = [11**0*1**0*****0**101****10*001*];$$

$$\mathbf{X}'''' = [x_4\ x_0\ x_1\ x_2\ x_3], \quad \mathbf{F}'''' = [1*1**1*001**1*****01*0***0*0*10*].$$

3. Редукция по переменной

Следующим шагом аналитического синтеза представление функции в виде матрицы и ее редукция к одной из бинарных операций. Для этого находятся классы эквивалентности строк матрицы функции. Затем матрица преобразуется к виду, содержащему по одной строке из каждого класса, а вектор индексов входа в матрицу модифицируется таким образом, чтобы вычисляемая функция осталась неизменной. После такого преобразования имеем правый операнд найденной бинарной операции и функцию, являющуюся ее левым операндом.

Рассмотрим матрицы функции (1), порожденные различными перестановками ее переменных:

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\ *&*\\ *&1\\ *&0\\ 1&*\\ 0&*\\ *&*\\ 1&0\\ *&1\\ *&*\\ 1&*\\ 0&1\\ *&*\\ *&0\\ 0&*\\ *&*\end{bmatrix},\ \mathbf{F}'=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*\\ 0&1\\ *&*\\ *&*\\ *&1\\ 1&*\\ *&0\\ 0&1\\ 1&*\\ *&*\\ 0&*\\ *&0\\ *&0\\ *&*\\ 1&*\\ 0&*\end{bmatrix},\ \mathbf{F}''=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*\\ 1&*\\ *&1\\ *&0\\ 0&1\\ *&*\\ 1&*\\ *&*\\ *&*\\ 0&1\\ *&0\\ *&*\\ *&0\\ *&0\\ *&1\\ 0&*\end{bmatrix},\ \mathbf{F}'''=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*\\ 1&*\\ *&1\\ *&0\\ 0&1\\ *&*\\ 1&*\\ *&*\\ *&*\\ 0&1\\ *&0\\ *&*\\ *&0\\ *&0\\ *&1\\ 0&*\end{bmatrix},\ \mathbf{F}''''=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*\\ *&*\\ 1&0\\ *&1\\ *&*\\ 1&0\\ *&*\\ 0&*\\ 0&*\\ 1&0\\ *&*\\ *&0\\ 1&*\\ *&1\\ *&0\\ *&*\end{bmatrix}.$$

Выберем одну из перестановок исходя из наибольшего покрытия матрицы функции, которое обеспечивается какими-либо двумя строками, например, нулевой строкой искомой операции, равной [1 0], и первой строкой – [0 1]. В результате замены значений левого вектора на один из номеров этих строк, наиболее близкий к соответствующей строке матрицы, получаем матрицу последней операции синтезируемой формулы (операция эквиваленции ~), правый ее операнд x_3 и вектор функции $\mathbf{F}_1$, являющийся ее левым операндом,

$$\mathbf{F}''''=\mathbf{F}_1\underset{\sim}{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}x_3,\quad \mathbf{X}_1=[x_4\ x_0\ x_1\ x_2],\ \mathbf{F}_1=[0001*0*110*0010*].$$

Повторяя перестановку переменных и редукцию матрицы функции $\mathbf{F}_1$, имеем

$$\mathbf{F}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&*\\1&0\\ *&0\\0&1\\ *&0\\1&*\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_1'=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&*\\1&0\\0&0\\0&1\\0&*\\ *&0\\1&1\\0&*\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_1''=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\ *&*\\1&*\\0&0\\0&1\\0&1\\0&0\\1&*\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_1'''=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\ *&0\\ *&1\\1&0\\ *&0\\0&1\\0&*\end{bmatrix}.$$

В свою очередь, выбрав представление $\mathbf{F}_1''$, получаем

$$\mathbf{F}_1''=\left(\mathbf{F}_2\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}x_0\right)\oplus\mathbf{F}_3,\ \mathbf{X}_2=[x_1\ x_2\ x_4],\ \mathbf{F}_2=[0**0110*],\ \mathbf{X}_3=[x_1\ x_2\ x_4],\ \mathbf{F}_3=[0**0110*],$$

где появилась остаточная функция $\mathbf{F}_3$, так как не удалось покрыть все строки матрицы $\mathbf{F}_1''$ строками выбранной операций. Повторяя описанную процедуру для функции $\mathbf{F}_2$ получим

$$\mathbf{F}_2 = \left(x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_2 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_4 , \ \mathbf{F}_3 = \left(x_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_2 .$$

В итоге имеем

$$\mathbf{F} = \left(\left(\left(x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_2 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_4 \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\left(x_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_2 \right) \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_3 .$$

4. Преобразование в заданный базис

Теперь осталось выполнить тождественные преобразования полученной формулы в заданный базис операций. Тождественные преобразования выполняются исходя из следующих правил:

– перестановка операндов операции эквивалентна транспонированию ее матрицы;
– отрицание левого операнда операции эквивалентно перестановке строк ее матрицы;
– отрицание правого операнда операции эквивалентно перестановке столбцов ее матрицы;
– отрицание результата операции эквивалентно отрицаю элементов ее матрицы.

Используя перечисленные выше правила для рассматриваемой функции имеем формулу с пятью унарными операциями и шестью бинарными, принадлежащим заданному базису B:

$$\mathbf{F} = (((\neg x_1 \ \& \ x_2) \oplus \neg x_4) \oplus ((\neg x_4 \ \& \ x_1) \oplus \neg x_2)) \oplus \neg x_3 .$$

5. Использование в программируемых логических устройствах

Известно, что классическая программируемая пользователем вентильная матрица (ППВМ) включают в себя три главных элемента: программируемые логические блоки (ПЛБ), блоки ввода-вывода (БВВ) и внутренние связи [4, с. 357]. Программируемые ресурсы внутренних связей обеспечивают управление путями соединения входов и выходов ПЛБ и блоков ввода-вывода. Логический блок классической ППВМ состоит из таблицы поиска M на 4 входа и триггера T (рис. 1).

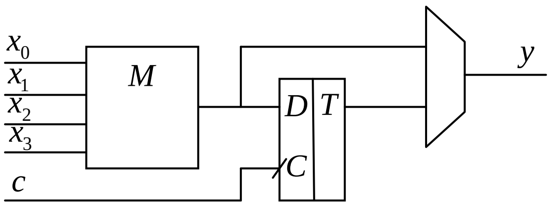

Рис. 1. Логический блок ППВМ

Поставим задачу отображения в структуру ППВМ некоторой дискретной обработки данных, задаваемой системой булевых функций в табличной форме.[1] Объединим каждые две булевы переменные в одну новую двухразрядную переменную, принимающую значения на множестве $\{0, 1, 2, 3\}$. Это позволит рассматривать таблицы поиска M как некоторые произвольно задаваемые булевы операции от двух четверичных операндов, которые и будем определять в процессе аналитической декомпозиции исходной функции.

В качестве примера выполним синтез формулы для ППВМ ранее использованной булевой функции. После укрупнения переменных получаем следующую таблицу истинности (табл. 2)

[1] Если исходная система булевых функций задана в другой форме, всегда может быть получено ее табличное представление. При этом допускается, что функции могут быть не полностью определенные.

Таблица 2 – Булева функция после укрупнения переменных

x_{01}	x_{23}	x_4	f
0	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
3	1	0	1
2	2	0	1
3	2	0	0
2	3	0	0
0	0	1	0
2	0	1	1
3	0	1	0
3	1	1	1
0	2	1	1
3	2	1	1
1	3	1	0

В результате аналитического синтеза имеем итоговую формулу

$$\mathbf{F} = \left(x_{01} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * \\ * & 1 & * & 0 \\ 1 & * & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix} x_{23} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_4 .$$

Заключение

Повышение производительности и увеличение объема памяти вычислительных средств позволяет ставить и решать задачу синтеза комбинационных схем новыми методами. Рассмотренный в настоящей работе метод аналитического синтеза и тождественных преобразований булевых формул при прочих равных условиях позволяет получать более эффективные схемы из логических элементов. Последнее основано на асимптотической оптимальности аналитического синтеза формул (доказано в [3]) и на небольшом увеличении числа операций (не более чем в два раза) при приведении в заданный базис формул, синтезируемых этим методом.

Рассмотренный метод также позволяет выполнять эффективный синтез формул, необходимых для программирования вентильных матриц. В этом случае по полученной формуле находится не только содержимое таблиц поиска программируемых логических блоков, но и необходимые коммутации внутренней сети программируемой пользователем вентильной матрицы, содержащиеся в структуре синтезированной формулы.

Литература

1. Выхованец В.С. Алгебраическая декомпозиция дискретных функций // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 3. – С. 20-56.
2. Выхованец В.С. Спектральные методы в логической обработке данных // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 10. – С. 28-53.
3. Выхованец В.С. Аналитическая идентификация дискретных объектов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 159-189.
4. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника. СПб: БХВ-Петербург, 2004.