Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 159-189.

© 2011 г. В.С. Выхованец, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрена задача идентификация дискретных объектов, сведенная к аналитической идентификации табличных функций, где под аналитической идентификацией понимается представление функции от многих переменных, заданных на конечных областях значений, скобочной формулой общего вида в базисе произвольных бинарных операций. Описана процедура построения формул, основанная на вычислении бинарных операций, порядка вхождения переменных и мест расстановки скобок. Приводятся оценки сложности получаемых формул.

1. Введение

При решении задач управления широко применяются математические модели, различающиеся оператором, задающим взаимосвязь характеристик объекта моделирования. Этот оператор может быть дифференциальным (разностным), интегральным (суммарным), функциональным (операционным), а также их комбинацией [1, 2]. В силу отсутствия строгих подходов к задаче выбора типа модели на первый план выходит интуиция, знания и опыт исследователя.[1]

После установления типа модели ставится и решается задача структурной идентификации. При *структурной* идентификации происходит уточнение исходных предпосылок и получение дополнительных сведений о моделируемом объекте. Причем каких-либо формализованных процедур выбора структуры модели до настоящего времени также не существует [3]. Структура модели определяется по наблюдаемым данным и имеющимся априорным знаниям об объекте. При этом доминирующим является применение переборных методов на заданном классе моделей [4].

Наиболее исследована функционально-дифференциальная модель [5], которая задается уравнениями, позволяющими выразить вектор выходных характеристик объекта $\mathbf{Y}$ через его вектор входных характеристик $\mathbf{X}$ с учетом некоторого вектора внутренних переменных (вектора состояния) $\mathbf{Q}$:

(1) $$\begin{cases} \mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, t); \\ \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, t), \end{cases}$$

[1] Здесь под типом модели понимается совокупность уравнений, связывающих характеристики объекта моделирования до введения причинно-следственных связей (до разделения характеристик на зависимые и независимые). Примерами таких уравнений могут служить уравнения механики, теплопроводности, электродинамики, газовой динамики, квантовой физики и т.п.

где $\mathbf{F}$ – вектор функций выходов, $\mathbf{G}$ – вектор функций переходов, $\dot{\mathbf{Q}}$ – вектор первых производных по времени t от переменных состояния.[2] Векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ в общем случае интерпретируются как нелинейные операторы, структура которых задана с точностью до вектора переменных состояния $\mathbf{Q}$.[3]

В зависимости от структуры операторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ в теории управления получают множество различных видов моделей [6]: статические и динамические, интегральные и дифференциальные, стохастические и детерминированные, стационарные и нестационарные, сосредоточенные и распределенные, линейные и нелинейные, одномерные и многомерные, инерционные и безынерционные, непрерывные и дискретные и т.д.

Для согласования найденного вида модели с моделируемым объектом решается следующая задача идентификации, сводимая к восстановлению непрерывных функций многих переменных по своим выборочным значениям. Исходные данные в этом случае получают в ходе эксперимента и чаще всего представляют в виде таблиц (матриц). Задача восстановления функций оказывается особо сложной, если экспериментальные данные зашумлены или представлены малыми выборками.[4]

При этом параметрические методы идентификации строятся исходя из предположения о наличии восстанавливаемой зависимости, заданной с точностью до конечного множества констант, а непараметрические методы реализуют определенное сглаживание экспериментальных данных, причем сама искомая функция предполагается непараметризуемой, т.е. не может быть задана конечным разложением по множеству элементарных (стандартных) функций [9].

Таким образом, при *параметрической* идентификации вид модели считается заданным, а в процессе наблюдения за объектом определяются числовые параметры модели, при которых расчетные значения откликов модели наилучшим образом согласовываются с экспериментально получаемыми данными. Несмотря на обилие работ по параметрической идентификации, используются лишь несколько подходов, сводимые к методу наименьших квадратов, стохастической аппроксимации и градиентному поиску [10, 11].

В свою очередь, при *непараметрической* идентификации модель задается с точностью до функциональных зависимостей, которые подлежат определению. В

---

[2] Выделение характеристик объекта и разделение их на входные и выходые является неформальной процедурой и осуществляется исходя из общей постановки задачи управления. Для нахождения переменных внутреннего состояния усматриваются два подхода: внутренние переменные или задаются исходя из тех же содержательных представлений, или определяеются в процессе моделирования путем анализа эмпирических данных, получаемых в условиях активного или пассивного эксперимента.

[3] Для обеспечения возможности настройки модели в уравнения (1) включаются дополнительные переменные. В данном случае это несущественно, так как переменные состояния могут рассматриваться как содержащие настраиваемые параметры модели (в этом случае соответствующие переменные будут зависеть от моделируемого объекта), а также параметры возмущения объекта со стороны внешней среды (в этом случае соответствующие переменные будут зависеть от состояния внешней среды).

[4] Этот подход близок классическому анализу данных, где ставится задача нахождения такого описания экспериментальных данных, которое позволяет находить одни характеристики изучаемого объекта по известным значениям других его характеристик [7, 8].

теоретических исследованиях для непараметрической идентификации используются методы поиска искомой функции в виде ее разложения в бесконечный ряд по ортогональным множествам функций [12, 13] или находятся коэффициенты дифференциальных (интегральных, вариационных) уравнений, решение которых дает искомую функциональную зависимость [14]. Однако для построения этих уравнений необходимы все те же априорные предположения о свойствах определяемых функций, так как на практике возможно получение только значений этих функции в конечном числе точек области определения [15, 16].

Заметим, что объекты реального мира, как правило, мыслятся и описываются при непрерывном времени и при непрерывных характеристиках (состояниях). Однако все методы идентификации предполагают дискретное время и дискретные значения характеристик.[5] Отсюда в зависимости от характера изменения состояния объекта вводятся и используются модели с непрерывным и дискретным изменением состояния, а в зависимости от времени такого изменения – модели с непрерывным и дискретным изменением времени (табл. 1).[6]

Основной особенностью этих моделей является то, что дискретизация во времени и квантование по значениям используется для представления все тех же непрерывных (гладких) функций. Такие модели следует назвать дискретно-непрерывними, так как при их идентификации требуется обеспечить наилучшее воспроизведение при помощи огибающей дискретной последовательности некоторой исходной непрерывной функции [19, 20]. Но в этом случае также необходимо и некоторое априорное предположение о виде выражаемой функциональной зависимости, т.е. опять возвращаемся к задаче непараметрической идентификации.

Однако существует класс задач идентификации, для решения которых не применимы известные подходы, базирующиеся на априорных гипотезах о виде исследуемой функциональной зависимости. Такие задачи, в частности, возникают при идентификации объектов, характерной особенностью которых является отсутствие предположений о содержательной интерпретации получаемых экспериментальных данных.

Видится закономерным введение еще одного типа идентификации, которую назовем *аналитической.* При аналитической идентификации находится выражение

---

[5] Все реальные объекты, которые наблюдаются на практике, конечно-дискретные как по времени, так и по характеристикам. Последнее следует из того, что регистрация бесконечного множества значений характеристик объекта не представляется возможным в принципе.

[6] Знак плюс в таблице читается как «следующее дискретное значение» и указывает на дискретность изменения переменной. Например, t^+ обозначает следующий дискретный момент времени, а $\mathbf{Q}^+$ – следующий вектор состояния, изменяющийся дискретно по каждому своему элементу, т.е. значения элементов принадлежат некоторым конечным множествам (в отличие от элементов $\mathbf{Q}$, принимающих значения на непрерывных множествах). В этом случае $\mathbf{Q}^+(t^+)$ интерпретируется как следующее дискретное состояние в следующий дискретный момент времени.

идентифицируемой функции по ее выборочным значениям, но без априорных предположений о ее непрерывном прообразе.[7]

В отличие от известных методов идентификации дискретных объектов, когда вид идентифицируемой функции известен заранее, при аналитической идентификации связь текущего состояния объекта и его характеристик выражается в виде формулы, выполняющей непосредственное воспроизведение экспериментальных данных с заданной точностью.

Аналитическая идентификация по постановке задачи близка методам синтеза формул в конечных алгебрах [21, 22], где функциональные построения осуществляются в заранее определенном базисе операций. В этой области доминируют два метода – алгебраический и спектральный. В алгебраическом методе в заданной алгебре ищется какая-либо формула функции, а затем для получения формулы с требуемыми свойствами выполняются ее тождественные преобразования [23]. Спектральный метод основан на разложении функции в ряд по некоторому множеству спектральных (ортогональных) функций, формулы которых известны [25].[8]

Однако в отличие от методов функциональных построений при аналитической идентификации базис операций и конструкция искомой формулы заранее неизвестны, а основная цель идентификации – получение компактных представлений функции по ее выборочным значениям.

В настоящей статье рассмотрена задача аналитической идентификации дискретных объектов, которая в явном виде в литературе ранее не освещалась. В отличие от похожих задач структурной, непараметрической и параметрической идентификации, а также функциональных построений и анализа данных задача аналитической идентификации имеет другую постановку. При аналитической идентификации с целью получения эффективных математических моделей дискретных объектов конструкция формулы определяется в процессе идентификации, переменные и функции принимают значения на произвольных конечных множествах, вычисляются наилучшие операции, связывающие значения переменных со значениями идентифицируемой функции.

2. Формальная постановка задачи

Будем предполагать, что такие понятия, как множество, принадлежность множеству, подмножество, упорядоченное множество, декартово произведение

---

[7] Принципиальное отличие аналитической идентификации от непараметричекой состоит в том, что при непараметричекой идентификации ищутся непрерывные функции, которые предполагаютя гладкими, т.е. возможно предсказание значений этих функций с заданной точностью в окрестности некоторой точки области определения. Поведение же дискретных функций, с помощью которых описывается объект при аналитической идентификации, таким свойством не обладает. Отсутствует также возможность использовать такое фундаментальное понятие, как предельный переход.

[8] Следует обратить внимание на комбинаторную сложность задачи поиска минимальных формул в алгебраическом методе [24] и непреодолимые вычислительные трудности спектрального метода, связанные с обращением матриц большого размера [25]. В последнем случае для нахождения обратных матриц и ускорения дискретного преобразования спектральный базис выбирается таким образом, чтобы матрицы прямого и обратного преобразования допускали факторизацию [26].

множеств, отношение, функция и существенная зависимость функции от переменной, разъяснения не требуют.[9]

В качестве семантической теории будем использовать табличные представления объектных функций. Тогда синтаксической теорией будет множество формул, которые получают для выражения этих функций на основе определяемых далее правил их построения и вычисления. Таким образом, разрабатываемая теория носит полностью формальный характер.

2.1. Дискретные функции

Введем обозначения для семейства множеств $\mathbf{N}_k$ таких, что при $k = 0$ имеем[10] $\mathbf{N}_0 = [0, 1, 2, \ldots]$ – множество натуральных чисел, а при $k \neq 0$ – $\mathbf{N}_k = [0, 1, \ldots, k-1]$. Будем предполагать, что на множествах $\mathbf{N}_k$ задано отношение нестрогого порядка $\leq$ и отношение равенства =, делающие эти множества линейно упорядоченными.[11]

Определение 1. Размерностью функции будем называть число переменных, от которых эта функция зависит, возможно несущественным образом.

Определение 2. Значностью функции (переменной) будем называть число элементов во множестве, на котором эта функция (переменная) принимает значения.

Пусть дискретная функция f размерности n принимает значения на множестве $\mathbf{N}_{k_f}$ и зависит от переменных $\mathbf{X} = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, принимающих значения на множествах $\mathbf{N}_{k_0}$, $\mathbf{N}_{k_1}$, …, $\mathbf{N}_{k_{n-1}}$, где k_f – значность функции f, а k_0, k_1, …, k_{n-1} – значности переменных x_0, x_1, …, x_{n-1} соответственно. Областью значений такой функции является множество $\mathbf{N}_{k_f}$, а область определения – множество $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_1 \times \ldots \times \mathbf{N}_{n-1}$, где $\times$ – знак декартова произведения множеств. Одной из форм задания дискретной функции является таблица [28, с. 383], где для всех или части комбинаций значений переменных заданы соответствующие значения функции (табл. 2). В этом случае максимальное число строк в таблице равно произведению значностей ее переменных.

Определение 3. Представлением функции f значности k_f и размерности n называется упорядоченное множество $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}]$, *в котором* $\mathbf{F}$ *– вектор значений функции длины m,* $\mathbf{K}$ *– вектор значностей переменных длины n и* $\mathbf{X}$ *– вектор обозначений (имен) переменных[12] длины n :*

---

[9] Определения перечисленных базовых понятий можно найти, например, в [27, 28].

[10] Здесь и далее знак равенства = будем использовать как знак отношения эквивалентности, выражающего идентичность (неотличимость, одинаковость, тождественность) сравниваемых элементов. В свою очередь, знак $\equiv$ будем использовать для выражения некоторого отношения эквивалентности, при использовании которого сравнение элементов осуществляется только в заданном смысле. Иными словами, два равных элемента всегда эквивалентны, но могут существовать эквивалентные элементы, которые не равны.

[11] Упорядоченное множество (последовательность, вектор, матрицу) будем выражать списком знаков элементов, заключенным в квадратные скобки, в отличие от неупорядоченного множества, для обозначения которого будем использовать фигурные скобки. Для разделения знаков элементов во множествах будем использовать запятую. Если это не вызывает неоднозначности при интерпретации, запятую будем опускать.

[12] Использование вектора имен переменных вызвана тем, что при моделировании дискретных объектов за каждой переменной обычно закрепляется некоторая семантическая интерпретация, выражаемая ее именем. Более того, так как. дискретный объект описывается не одной, а несколькими функциями, то при моделировании возникает также необходимость присваивать переменным индивидуальные имена, что позволяет, например, выявить общие переменные двух и более функций.

(2) $\quad \mathbf{F}=[f_q \mid f_q \in \mathbf{N}_{k_f}; q=\overline{0,m-1}]; \quad \mathbf{K}=[k_i \mid k_i \in \mathbf{N}_0; i=\overline{0,n-1}]; \quad \mathbf{X}=[x_i \mid i=\overline{0,n-1}]$,[13]

и для которого выполняется следующее условие:

(3) $$m=\prod_{i=0}^{n-1} k_i .$$[14]

Условие (3) утверждает, что число элементов в векторе функции $\mathbf{F}$ равно числу элементов во множестве $\mathbf{\Lambda}$, состоящем из всех возможных векторов значений переменных $\mathbf{X}$ (строк табл. 2).

Установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbf{\Lambda}$, состоящим из m векторов значений переменных $\boldsymbol{\lambda}_q=[\lambda_{iq} \mid i=\overline{0,n-1}]$, $q \in \mathbf{N}_m$, и вектором $\mathbf{F}$ следующим образом:

(4) $$\mathbf{F}[x_0\ x_1 \ldots x_{n-1}]=f_q, \quad q=\sum_{i=0}^{n-1} x_i \prod_{j=0}^{i-1} k_j ,$$

куда вместо вхождений знаков переменных x_i подставляются их значения λ_{iq} из соответствующего вектора $\boldsymbol{\lambda}_q$ (q-й строки табл. 2).[15]

Для обратного преобразования индекса элемента $q \in \mathbf{N}_m$ в вектор значений переменных $\boldsymbol{\lambda}_q=[\lambda_{iq} \mid i=\overline{0,n-1}]$ воспользуемся рекуррентным правилом

(5) $$\left.\begin{aligned} \lambda_{iq} &= q_i \bmod k_i; \\ q_{i+1} &= q_i \operatorname{div} k_i; \end{aligned}\right\} \quad i=\overline{0,n-1}$$

с начальным условием $q_0=q$, где бинарная операция mod – остаток от целочисленного деления первого операнда на второй, а div – целая часть такого деления.[16]

Пример 1. Зададим представление дискретной функции, вектор значений которой выражается первыми 24 десятичными цифрами числа $\pi \approx 3{,}14159265358979323846265$, взятыми по модулю 3 (остатками от целочисленного деления цифр на число 3). Определим четыре переменные таким образом, чтобы произведение их значностей было равно длине вектора функции.[17] В итоге имеем искомое представление $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\,\mathbf{X}]$:

$$\mathbf{F}=[0111202020\,2201002021\,0202]; \quad \mathbf{K}=[2\,2\,2\,3]; \quad \mathbf{X}=[x_0\ x_1\ x_2\ x_3]. \ \blacklozenge$$

---

[13] Знак |, используемый внутри скобок, отделяет обозначения элементов множества от формализованного описания процедуры, предназначенной для их перечисления или распознавания. В свою очередь, черта над списком из двух элементов обозначает упорядоченное множество, начинающееся с первого элемента в списке и заканчивающееся последним.

[14] Здесь и далее используется арифметика натуральных чисел с операциями сложения + и умножения $\cdot$, а также с их ограниченными кванторами суммы Σ и произведения Π.

[15] Рассматриваемое взаимно однозначное соответствие эквивалентно представлению индекса элемента вектора $\mathbf{F}$ в позиционной системе счисления с основаниями, задаваемыми вектором значностей переменных $\mathbf{K}$, что, собственно, и выражено формулой (4).

[16] Доказательство взаимной однозначности соответствия (4) и его обратимости посредством рекуррентного правила (5) опустим в силу его тривиальности.

[17] Следует заметить, что на одном векторе $\mathbf{F}$ длины m можно задать множество функций, различающихся порядком и значностями переменных, т.е. для каждого представления числа m в виде произведения n целых чисел, больших единицы, можно определить $n!$ функций, где ! – знак факториала. Иными словами, число дискретных функций значительно больше, чем число их векторов.

О п р е д е л е н и е 4. Неполностью определенной дискретной функцией называется такая дискретная функция, значения которой заданы не для всех векторов значений ее переменных.

Пример 2. Зададим в виде таблицы неполностью определенную дискретную функцию (табл. 3). В этом случае эта таблица состоит из меньшего числа строк по сравнению с таблицей полностью определенной функции.

Из анализа табл. 3 следует, что функция имеет значность 3, а ее переменные – значности 2, 2, 2 и 3 соответственно. Воспользовавшись формулами (4), запишем представление $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\,\mathbf{X}]$ этой функции:

$$\mathbf{F}=[01{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}0{*}0{*}{*}{*}{*}1{*}2{*}2]; \quad \mathbf{K}=[2\,2\,2\,3]; \quad \mathbf{X}=[x_0\ x_1\ x_2\ x_3],$$

где для выражения не определенных в таблице значений функции применен знак *, обозначающий любое из ее возможных значений из множества $\mathbf{N}_3$. ♦

О п р е д е л е н и е 5. Два представления эквивалентны, если они задают одну и ту же дискретную функцию, возможно неполностью определенную.

Пример 3. Найдем представление $[\mathbf{F}'\ \mathbf{K}'\mathbf{X}']$, эквивалентное представлению $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\,\mathbf{X}]$ функции из примера 2. Для этого изменим порядок переменных в табл. 3, выполнив перестановку столбцов переменных x_2 и x_3. В результате получим представление $[\mathbf{F}'\ \mathbf{K}'\mathbf{X}']$:

$$\mathbf{F}'=[01{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}1{*}{*}{*}{*}0{*}0{*}{*}2{*}2]; \quad \mathbf{K}'=[2\,2\,3\,2]; \quad \mathbf{X}'=[x_0\ x_1\ x_3\ x_2],$$

которое задает ту же самую дискретную функцию, так как для одних и тех же значений переменных значения функции, получаемые из представлений $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\,\mathbf{X}]$ и $[\mathbf{F}'\ \mathbf{K}'\mathbf{X}']$, равны. ♦

2.2. Дискретные операции

О п р е д е л е н и е 6. Дискретной операцией будем называть такую дискретную функцию, которая существенно зависит от своих переменных.

В зависимости от размерности операций будем различать унарные (одноместные), бинарные (двухместные) и в общем случае r-нарные (r-местные) операции. Если дискретная функция размерности n существенным образом зависит только от r своих переменных, то такую функцию следует рассматривать как r-нарную операцию.

Так как любая операция – это функция, то для задания операций могут быть использованы те же формы, что и для задания дискретных функций. Однако для наглядности унарные операции будем задавать векторами, а бинарные – матрицами.

О п р е д е л е н и е 7. Результатом применения унарной (бинарной) операции, заданной вектором $\neg$ (матрицей $\circ$),

$$\neg=[c_i \mid i=\overline{0,k_0-1}] \quad (\circ=[c_{ij} \mid i=\overline{0,k_0-1},\ j=\overline{0,k_1-1}]),$$

к переменной a *(к переменным* a *и* b*) является элемент* c_a *(*c_{ab}*), т.е.* $\neg a = c_a$ *(*$a \circ b = c_{ab}$*), где* k_0 *– значность переменной унарной операции (*k_0 *и* k_1 *– значности первой и второй переменной бинарной операции).*[18]

Пример 4. Определим унарную и бинарную операции вектором $\neg$ и матрицей $\circ$:

$$\neg = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \circ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда для унарной операции $\neg$ могут быть получены ее значения при различных значениях ее единственной переменной: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\neg 2 = 2$. Аналогично для бинарной операции $\circ$ имеем: $0 \circ 0 = 0$, $0 \circ 1 = 1$, $1 \circ 0 = 2$, $1 \circ 1 = 0$, $2 \circ 0 = 1$, $2 \circ 1 = 1$. ♦

Нетрудно видеть, что, зная значения операции для всех векторов значений переменных, можно построить ее представление или таблицу. Возможен также обратный переход от представления или таблицы к вектору – для унарных операций, или матрице – для бинарных.

2.3. Композиция и декомпозиция

При декомпозиции функция f представляется в виде композиции функций g и h_0, h_1, …, h_{u-1}, как правило, меньшей размерности, чем размерность функции f:

(6) $$f(X) = g(h_0(X_0),\ h_1(X_1), \ldots,\ h_{u-1}(X_{u-1})),$$

где функции h_i зависят от некоторых подмножеств X_i множества переменных X функции f $(i = \overline{0, u-1})$, а g – от u переменных, вместо которых подставляются функции h_i, причем сами функции h_i также могут выражаться формулами вида (6), которые в этом случае называются подформулами.[19]

О п р е д е л е н и е 8. Формулой дискретной функции будем называть выражение (6), связывающее значения функции со значениями ее переменных через композицию некоторого множества других (вспомогательных) функций (операций).

Для нахождения композиции (6) используются различные формальные системы, задаваемые, как правило, аналитическими конструкциями порождаемых ими формул, например: дизъюнктивная, конъюнктивная, литеральная, интервальная, Жегалкина, Рида-Малера, теоретико-числовая, полиномиальная, Радемахера, Уолша, Хаара, Виленкина-Крестенсона и т.д. [29]. Основное назначение аналитической конструкции – упорядочить процесс построения формул, сделать его регулярным и эффективным. По своей сути каждая аналитическая конструкция является одной из возможных декомпозиционных схем, в рамках которой ищется формульное выражение функции.

На практике композицию функции стремятся строить из переменных и операций небольшой размерности и значности, принадлежащих некоторому их множеству, или базису, причем лучшей формулой считается та формула, которая содержит меньшее

---

[18] Иногда переменная (аргумент) операции называется операндом.

[19] Для обозначения функции f и вектора ее переменных $[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ будем использовать традиционную нотацию $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ или эквивалентные ей $f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ и $f([x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}])$.

число операций.[20] Исходя из этого дадим несколько дополнительных определений, которые потребуются далее.

Определение 9. Две формулы эквивалентны, если они выражают одну и ту же функцию.[21]

Определение 10. Длиной формулы называется число входящих в нее операций (вспомогательных функций).

Определение 11. Значностью формулы называется число k, равное максимальной из значностей входящих в нее операций (вспомогательных функций).

2.4. Аналитический синтез

В качестве исходных данных для аналитической идентификации объекта будем использовать таблицу дискретной функции, которая получена в результате наблюдения за его параметрами.[22] Если объект необходимо идентифицировать с заданной точностью, то области определения параметров разбиваются на конечное число непересекающихся подобластей, а значения параметров заменяются номерами тех подобластей, которым они принадлежат.

Задачу аналитической идентификации дискретной функции сведем к аналитическому синтезу формул, который заключается в поиске выражения дискретной функции через унарные и бинарные операции. Предполагается, что функция может быть неполностью определенной, а операции – любыми.

Ввиду того, что основной целью идентификации является аппаратурная или программная реализация получаемой модели на вычислительном средстве дискретного действия, ограничим диапазон значностей операций формулы некоторым числом k, являющимся значностью синтезируемых формул (определение 11).

Эффективность формул будем оценивать их длиной. При этом из двух формул одной и той же функции при прочих равных условиях более эффективной будет та, которая имеет меньшую длину, т.е. содержит меньшее число операций.

[20] Вычислительные (моделирующие) устройства дискретного действия реализуют, как правило, унарные и бинарные операции аппаратурными средствами, а операции большей местности – программно. В частности, в си-подобных языках используется тернарная операция арифметического ветвления (условного вычисления) вида x?y:z, а доступ к элементам многомерного массива F[x, y, …, z] можно рассматривать как операцию с местностью, равной числу измерений этого массива.

[21] Формула выражает функцию, если значения функции при всех значениях переменных равны результату вычисления формулы при тех же значениях переменных. Заметим, что выражения «формула выражает функцию» и «формула функции» семантически эквивалентны.

[22] Необходимость использования функциональных представлений для моделирования дискретных объектов, помимо всего прочего, связана с детерминистской и нереверсивной природой современных моделирующих устройств. При использовании таких устройств предполагается, что все вычисляемые отображения имеют единственное результирующее значение, т.е. являются функциями. Причем знание результата вычисления не позволяет однозначно восстановить значения переменных, вызвавших этот результат, т.е. являются нереверсивными функциями. Более того, все функции, реализуемые аппаратурными средствами, являются операциями.

3. Аналитические конструкции формул

Многообразие аналитических конструкций является следствием попыток синтеза эффективных формул, но для ограниченных множеств функций. При этом для каждой из аналитических конструкций может быть найдено множество функций, имеющих более эффективное представление по сравнению с формулами другой аналитической конструкции.

Обобщим известные конструкции формул и найдем такую конструкцию, которая имеет наилучшие выразительные возможности, т.е. множество эффективно представляемых функций которой наибольшее. Для найденной конструкции приведем процедуру синтеза формул и покажем ее сходимость.

3.1. Аналитическая конструкция общего вида

Рассмотрим предельно общую аналитическую конструкцию, описывающую множество формул с унарными и бинарными операциями при произвольной расстановке скобок. Для описания такой конструкции воспользуемся формальной грамматикой[23] $[\mathrm{T},\ \mathrm{N},\ \mathrm{P},\ \Phi]$, заданной на некотором терминальном алфавите T, достаточном для записи всех формул, и имеющей нетерминальный алфавит $\mathrm{N} = \{\Delta, \mathrm{X}, \Xi, \Theta, \Phi\}$, а также правила вывода, или продукции, P вида:

(7) $$\Phi \to \Delta \,|\, \mathrm{X} \,|\, \Xi\ \Phi \,|(\Phi\ \Theta\ \Phi),$$

где Φ – аксиома грамматики (всегда нетерминальный знак); $\to$ – знак вывода (текстовой замены); Δ – терминальное вхождение константы, выражаемой произвольным элементом $\mathbf{N}_k$; X – терминальное вхождение переменной, выражаемой произвольным элементом $\mathbf{X}$; Ξ (Θ) – терминальное вхождение унарной (бинарной) операции, а вертикальная черта разделяет правые части продукций (после знака вывода), имеющих одинаковую левую часть (до знака вывода).[24] Для демонстрации основных понятий теории формальных грамматик рассмотрим пример.

Пример 5. Выведем одну из формул, описываемых продукциями (7). Вывод осуществляем путем последовательного применения продукций грамматики и начинаем из аксиомы Φ:

$$\Phi \xrightarrow{4} (\Phi\ \Theta\ \Phi) \xrightarrow{3} (\Xi\ \Phi\ \Theta\ \Phi) \xrightarrow{4} (\Xi\ \Phi\ \Theta\,(\Phi\ \Theta\ \Phi)) \xrightarrow{3}$$
$$\xrightarrow{3} (\Xi\ \Phi\ \Theta\,(\Xi\ \Phi\ \Theta\ \Xi\ \Phi)) \xrightarrow{2} (\Xi\ \mathrm{X}\ \Theta\,(\Xi\ \mathrm{X}\ \Theta\ \Xi\ \mathrm{X})),$$

---

[23] При описании конструкции формул применим синтаксические средства, предоставляемые хорошо разработанной теорией формальных языков и грамматик (см., например, [30]). Это позволит использовать семантические результаты этой теории для содержательной интерпретации свойств синтезируемых формул, т.е. теория формальных языков и грамматик привлекается как метатеория для рассматриваемой теории аналитической идентификации.

[24] Одно из содержательных утверждений метатеории, которое можно сделать по виду продукций (7), следующее. Так как все формулы порождаются контекстно-свободной грамматикой, то рассматриваемое множество формул разрешимо, т.е. для произвольной последовательности скобок, констант, переменных и операций можно конструктивными средствами установить ее принадлежность множеству формул. Причем в качестве такого средства необходимо использовать магазинный автомат – конечный автомат эту задачу решить не может [31].

где сверху над знаком вывода указан номер продукции из (7). Вывод завершаем тогда, когда в выводимой строке отсутствуют вхождения нетерминальных знаков. Далее, после замены вхождений нетерминальных знаков Ξ, X и Θ на выражающие их терминальные знаки (термы), получим итоговую формулу:

(8) $$(\neg_0 x_0 \circ_0 (\neg_1 x_1 \circ_1 \neg_2 x_2)),$$

где $\neg_i$ ($i=\overline{0,2}$) – знаки унарных операций, $\circ_j$ ($j=\overline{0,1}$) – знаки бинарных операций, x_t ($t=\overline{0,2}$) – переменные из $\mathbf{X}$. ♦

При интерпретации выводимых формул предполагается, что унарные операции имеют больший приоритет по сравнению с бинарными. Для конкретизации выведенных формул необходимо определить входящие в них операции.

Пример 6. Зададим операции для формулы (8) в виде следующих векторов и матриц:

(9) $$\neg_0=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\ \neg_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \neg_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \circ_0=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\ \circ_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\2&0\end{bmatrix},$$

где значности операций в порядке их перечисления равны 3, 2, 2, 3 и 3. После подстановки векторов и матриц из (9) в (8) получим формулу

(10) $$\left(\begin{bmatrix}\underline{1}\\2\\0\end{bmatrix}x_0\begin{bmatrix}2&0&0\\0&\underline{2}&1\\1&1&2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\underline{1}\end{bmatrix}x_1\begin{bmatrix}0&1\\\underline{1}&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\underline{0}\end{bmatrix}x_2\right)\right)$$

длины 5 и значности 3. Из анализа формулы (10) следует, что переменные имеют значности $k_0=3$, $k_1=3$ и $k_2=2$. Подчеркивание элементов матриц и векторов в формуле (10) будет объяснено в следующем примере.♦

Пример 7. Покажем нахождение значений функции, выраженной формулой из примера 6. Пусть $\boldsymbol{\lambda}=[021]$ – вектор значений переменных $\mathbf{X}=[x_0x_1x_2]$, т.е. $x_0=0$, $x_1=2$, $x_2=1$. Тогда значением рассматриваемой функции будет элемент $\neg_0 0\circ_0(\neg_1 2\circ_1\neg_2 1)$. Используя определения унарных операций из (9), находим результаты этих операций, которые в вычисляемой формуле (10) подчеркнуты: $\neg_0 0=1$, $\neg_1 2=1$ и $\neg_2 1=0$. Аналогично вычисляем результаты бинарных операций (также подчеркнуты): $1\circ_1 0=1$, $1\circ_0 1=2$. В итоге находим, что искомым значением функции является элемент 2. ♦

3.2. Каноническая аналитическая конструкция

Определение 12. Канонической будем называть формулу, имеющую аналитическую конструкцию K *:*[25]

---

[25] Здесь, как и ранее, предполагается, что аналитическая конструкция задается формальной грамматикой $[\mathrm{T},\ \mathrm{N},\ \mathrm{P},\ \mathrm{K}]$. Далее будем опускать несущественные подробности и отождествлять множество продукций грамматики (или ее аксиому) с аналитической конструкцией формул, так как из продукций и аксиомы непосредственно следуют свойства выводимых формул.

(11) $$\mathrm{K} \to \Delta \mid \Xi\ \mathrm{X} \mid \Psi ;\quad \Psi \to \mathrm{X} \mid (\Psi\ \Theta\ \Psi),$$

где Δ *– вхождение константы,* X *– вхождение переменной,* Ξ *(*Θ*) – вхождение унарной (бинарной) операции,* Ψ *– каноническая подформула.*[26]

Теорема 1. Для любой формулы общей конструкции (7) с длиной l *существует эквивалентная ей формула с канонической аналитической конструкцией (11) и длиной, не превосходящей* l*.*

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении. В дальнейшем потребуются следующие определение и теорема.

Определение 13. Аналитические конструкции эквивалентны, если множества порождаемых ими формул равны.

Теорема 2. Каноническая аналитическая конструкция (11) эквивалентна аналитической конструкции M*:*

(12) $$\mathrm{M} \to \Delta \mid \Xi\ \mathrm{X} \mid \Psi ;\quad \Psi \to \mathrm{X} \mid (\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi) \mid ((\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)\ \Theta\ \Psi).$$[27]

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Теоремы 1 и 2 доказаны впервые и из них непосредственно следует, что каноническая аналитическая конструкция ни в форме (11), ни в форме (12) не эквивалентна общей аналитической конструкции (7). Последнее видно из доказательства теоремы 1, где любая формула канонической аналитической конструкции в форме (11) выводится как формула общей аналитической конструкции. Однако обратное неверно, так как из формул канонических конструкций K и M исключены избыточные вхождения унарных операций, присутствующие в аналитической конструкции Φ. При этом множества функций, выражаемые всеми этими конструкциями, равны.

3.3. Канонизация формул

Для приведения формулы общего вида (7) к каноническому представлению (12) применим процедуру, использованную при доказательстве теоремы 1.

Пример 8. Выполним канонизацию формулы из примера 6. Из (10) находим, что применение унарной операции $\neg_1$ к переменной x_1 эквивалентно такому преобразованию бинарной операции $\circ_1$, при котором вместо нулевой строки ее матрицы берется строка 1, вместо первой строки – строка 0, а вместо второй строки копируется строка 1. В результате описанных преобразований имеем

[26] Множество нетерминальных знаков грамматики помимо аксиомы может содержать и другие нетерминальные знаки. Части формул, выводимых из этих нетерминальных знаков, будем называть подформулами.

[27] Справедливо более сильное утверждение относительно конструкции M. Можно показать, что конструкция K эквивалентна такой конструкции M, в которой вхождение переменной X в $(\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)$ означает отсутствие вхождений этой переменной в Ψ. Последнее возможно благодаря имеющейся в конструкциях произвольности в выборе операций и мест расстановки скобок. Однако такая конструкция M выражается контекстно-зависимой грамматикой, которая сложна (содержит контекстные продукции) и громоздка (содержит большое их число).

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\left(x_1 \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x_2 \right).$$

В свою очередь, выполнение унарной операции $\neg_2$ эквивалентно перестановке[28] [1 0] столбцов матрицы операции $\circ_1$,

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\left(x_1 \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} x_2 \right).$$

Проанализируем теперь бинарную операцию $\circ_0$. Находим, что ее значность равна 2. Следовательно, при вычислениях следующей бинарной операции (расположена слева от скобок) используются только первые два ее столбца. Поэтому последний столбец может быть удален,

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0\\0&2\\1&1\end{bmatrix}\left(x_1 \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} x_2 \right).$$

В свою очередь, унарная операция $\neg_0$ вызывает перестановку [1 2 0] строк первой бинарной операции в полученной формуле,

$$x_0 \begin{bmatrix}0&2\\1&1\\2&0\end{bmatrix}\left(x_1 \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} x_2 \right).$$

В итоге получаем каноническую формулу $x_0 \bullet_0 (x_1 \bullet_1 x_2)$, где

$$\bullet_0 = \begin{bmatrix}0&2\\1&1\\2&0\end{bmatrix},\ \bullet_1 = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

Последней выполняемой операцией в формуле является $\bullet_0$, следовательно, существует ровно две другие канонические формулы, определяемые числом перестановок элементов области значения операции $\bullet_1$. Выполнив перестановку [1 0] элементов области значения операции $\bullet_1$ и такую же перестановку столбцов операции $\bullet_0$, получаем операции второй канонической формулы $x_0 \div_0 (x_1 \div_1 x_2)$:

$$\div_0 = \begin{bmatrix}2&0\\1&1\\0&2\end{bmatrix},\ \div_1 = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Для каждой формулы, полученной в результате перестановок элементов областей определения операций, возможны также по три перестановки подформул с бинарными операциями. В частности, для формулы с операциями $\div_0$ и $\div_1$ имеем:

---

[28] Здесь и далее перестановку n элементов будем обозначать вектором длины n, все элементы которого различны и принадлежат $\mathbf{N}_n$.

$$x_0 \div_0 (x_1 \div_1 x_2), \quad (x_1 \div_1 x_2) \div_0 x_0, \quad x_0 \div_0 (x_2 \div_1' x_1), \quad (x_2 \div_1' x_1) \div_0' x_0,$$

где для сохранения эквивалентности формул матрицы соответствующих операций транспонируются,

$$\div_0' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \div_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверкой убеждаемся в эквивалентности исходной и канонических формул. ♦[29]

4. Аналитическая идентификация

В соответствии с приведенной ранее постановкой задачи идентификации представление дискретной функции $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}]$ будем использовать как исходные данные для построения формул, выражающих эту функцию. В том случае, когда вид формул не важен, будем использовать представление $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}]$ для обозначения всего множества формул функции, которые могут быть получены из этого представления.

4.1. Процедура идентификации

Перед описанием процедуры идентификации зададим на множестве векторов метрику, порождаемую некоторым отношением эквивалентности элементов $\equiv$.[30]

Определение 14. Пусть заданы два вектора равной длины $\mathbf{F} = [f_i \mid i = \overline{0, m-1}]$ *и* $\mathbf{G} = [g_i \mid i = \overline{0, m-1}]$. *Расстоянием между* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{G}$ *относительно отношения эквивалентности элементов* $\equiv$ *называется значение функции* $d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \in \mathbf{N}_m$, *равное числу элементов* $\mathbf{F}$, *не эквивалентных соответствующим элементам* $\mathbf{G}$,[31]

$$d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \sum_{i=0}^{m-1} \delta(f_i, g_i), \quad \delta(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \equiv b; \\ 1, & \text{если } a \not\equiv b. \end{cases}$$

Приведем процедуру аналитической идентификации, которая осуществляет построение формулы функции в соответствии с продукциями канонической аналитической конструкции M (12). Будем предполагать, что задано некоторое число k, ограничивающее значность синтезируемой формулы.

---

[29] Следует обратить внимание на возможность минимизации числа различных операций, входящих в формулу. Для этого, как это показано в примере 8, требуется выполнять такие перестановки элементов областей значений операций формулы и перестановки их переменных, чтобы, по возможности, преобразовать одну операцию в другую.

[30] Отношение эквивалентности $\equiv$ следует определять с учетом возможного неопределенного значения сравниваемых элементов, ранее выражаемых знаком * в векторах неполностью определенных функций. В этом случае любой элемент считается эквивалентным *.

[31] Можно показать, что дискретная функция d является метрикой в арифметике натуральных чисел относительно отношения $\equiv$, так как удовлетворяет следующим аксиомам: $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ (аксиома тождества); $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = d(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ (аксиома симметрии); $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \le d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) + d(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ (аксиома треугольника), где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – любые векторы одинаковой длины.

Процедура 1.[32] Идентификация дискретной функции f, заданной представлением $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}]$:

1) если $\mathbf{F}=[c\,c\ldots c]$, т.е. вектор функции состоит из константы c, то завершаем процедуру с формулой c (первая продукция аналитической конструкции M);

2) если $\mathbf{X}=[x_i]$, то завершаем процедуру с формулой x_i при $\mathbf{F}=[0\,1\ldots k_i-1]$ (третья и четвертая продукции) или с формулой $\neg x_i$ – при $\mathbf{F}\neq[0\,1\ldots k_i-1]$ (вторая продукция), где k_i – значность переменной x_i, $\neg$ – искомая унарная операция, $\neg=[f_q\mid q=\overline{0,k_i-1}]$, а f_q – q-й элемент вектора $\mathbf{F}$;

3) иначе найдем переменную $x_i\in\mathbf{X}$, бинарную операцию $\otimes$ и представление $[\mathbf{F}'\ \mathbf{K}'\ \mathbf{X}']$ функции f' такие, что значность этой функции не превосходит k, а вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $x_i\otimes\psi[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ отстоит на наименьшее расстояние d от вектора $\mathbf{F}$, где $\psi[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ – формула, получаемая для функции f' с представлением $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ с помощью настоящей процедуры;[33]

4) если после выполнения предыдущего шага окажется, что $d(\mathbf{F},\mathbf{G})=0$, то завершаем процедуру с формулой $(x_i\otimes\psi[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'])$, которую предварительно канонизируем (пятая продукция);

5) в противном случае, при $d(\mathbf{F},\mathbf{G})>0$, найдем бинарную операцию $\oplus$ и представление $[\mathbf{F}''\mathbf{K}''\mathbf{X}'']$ функции f'' такие, что значность этой функции не превосходит k, а вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $(x_i\otimes\psi[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'])\oplus\psi[\mathbf{F}''\mathbf{K}''\mathbf{X}'']$ равен вектору $\mathbf{F}$, где $\psi[\mathbf{F}''\mathbf{K}''\mathbf{X}'']$ – формула, получаемая для функции f'' с представлением $[\mathbf{F}''\mathbf{K}''\mathbf{X}'']$ с помощью настоящей процедуры (шестая продукция);

6) завершаем процедуру с итоговой формулой $((x_i\otimes\psi[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'])\oplus\psi[\mathbf{F}''\mathbf{K}''\mathbf{X}''])$, которую предварительно канонизируем. ♦

Шаги 1 и 2 процедуры 1 тривиальны. Детальное разъяснение и обоснование остальных шагов процедуры приведено далее.

4.2. Начальное приближение

На шаге 3 процедуры 1 выделяется некоторая переменная x_i, для которой находится операция $\otimes$ и функция f' с представлением $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ такие, что значность этой функции не превосходит k, а вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $x_i\otimes\psi[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ отстоит на наименьшее расстояние от исходного вектора $\mathbf{F}$.

Предварительно, не накладывая ограничений на значность функции f', найдем представление $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ этой функции и операцию $\otimes$ такие, что $\mathbf{F}=\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ – вектор значений формулы g,

---

[32] Взаимосвязь понятий «процедура» и «алгоритм» аналогична взаимосвязи понятий «утверждение» и «теорема» (см. сноску 36): процедура – это описание конечной и результативной последовательности действий, выполненное на семантическом уровне, в то время как для описания алгоритма требуется использование только синтаксических средств. Предполагается, что путем формализации содержательных построений любая процедура может быть выражена на формальном языке некоторой алгоритмической модели (тезис Черча-Тьюринга [33, с. 88]).

[33] Предполагается, что при реализации процедуры 1 для получении формулы ψ будет использован рекурсивный вызов этой процедуры.

(13) $$g = [\mathbf{F}'\,\mathbf{K}'\,\mathbf{X}'] \otimes x_i, \quad x_i \in \mathbf{X}, \quad x_i \notin \mathbf{X}'.$$ [34]

Процедура 2. Синтез начальной (точной) формулы вида (13) для функции f, заданной представлением $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\,\mathbf{X}]$:

1) пусть переменная x_i значности k_i – последняя переменная в векторе $\mathbf{X}$, а переменная x_j значности k_j – предпоследняя, т.е. $\mathbf{X} = [\ldots x_j\ x_i]$ и $\mathbf{K} = [\ldots k_j\ k_i]$;[35]

2) определим матрицу операции $\otimes$ следующим образом:

(14) $$\otimes = [p_{st} \mid p_{st} = f_q,\ q = s + tK_i,\ s = \overline{0, K_i - 1},\ t = \overline{0, k_i - 1}],$$

где f_q – q-й элемент вектора $\mathbf{F}$, $K_i = m \operatorname{div} k_i$, m – длина вектора $\mathbf{F}$;

3) найдем для искомой функции f' представление $[\mathbf{F}'\,\mathbf{K}'\,\mathbf{X}']$, в котором

$$\mathbf{F}' = [f'_t \mid f'_t = t; t = \overline{0, K_i - 1}], \quad \mathbf{K}' = [\ldots k_j], \quad \mathbf{X}' = [\ldots x_j];$$

4) возвращаем результирующую формулу $[\mathbf{F}'\,\mathbf{K}'\,\mathbf{X}'] \otimes x_i$. ♦

Теорема 3. Вектор значений $\mathbf{G}$ *формулы (13), синтезируемой с помощью процедуры 2, равен вектору исходной функции* $\mathbf{F}$.

Справедливость утверждения теоремы 3 покажем на примере.[36]

Пример 9. Пусть требуется найти начальную формулу для функции из примера 1, имеющую представление $[\mathbf{F}\ \mathbf{K}\,\mathbf{X}]$:

$$\mathbf{F} = [0111202020\,2201002021\,0202]; \quad \mathbf{K} = [2\,2\,2\,3]; \quad \mathbf{X} = [x_0\ x_1\ x_2\ x_3].$$

Применяя процедуру 2 к этому представлению, имеем:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}' = [0\,1\,\underline{2}\,3\,4\,5\,6\,7] \\ \mathbf{K}' = [222] \\ \mathbf{X}' = [x_0 x_1 x_2] \end{bmatrix} \underset{\otimes}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \underline{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} x_3,$$

---

[34] Далее вместо формулы вида $x_i \otimes \psi[\mathbf{F}'\,\mathbf{K}'\,\mathbf{X}']$ будем использовать эквивалентную ей формулу $[\mathbf{F}'\,\mathbf{K}'\,\mathbf{X}'] \otimes^T x_i$, в которой матрица операции $\otimes$ транспонирована, а вместо формулы $\psi[\mathbf{F}'\,\mathbf{K}'\,\mathbf{X}']$ будем использовать представление $[\mathbf{F}'\,\mathbf{K}'\,\mathbf{X}']$, не детализированное до конкретного выражения.

[35] Ввиду изменения в дальнейшем порядка переменных в представлении $[\mathbf{F}\,\mathbf{K}\,\mathbf{X}]$ может оказаться, что на последнем месте в векторе $\mathbf{X}$ находится произвольная переменная x_i, а не x_{n-1}. То же самое касается и предпоследней переменной в этом векторе.

[36] Высказывания, истинность которых показывается чисто семантическими средствами – путем содержательных рассуждений, будем называть утверждениями, в противоположность теоремам, формулировка и доказательство которых осуществляется сугубо синтаксическими средствами, возможно выраженными на естественном языке. Считается, что для всякого семантического доказательства можно получить его синтаксический аналог, если формализовать соответствующие содержательные рассуждения (тезис Гильберта [34, с. 49]). В данном случае предполагается, что в качестве синтаксической теории используется теория множеств, построенная на аксиомах Цермело-Френкеля [27], записанных на языке классического исчисления предикатов первого порядка [35].

или $f = [\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'] \otimes x_3$, где представление $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ используется для задания некоторой функции f'. Проверкой убеждаемся, что вычисление вектора значений полученной формулы дает исходный вектор $\mathbf{F}$.

Например, при значениях переменных $\mathbf{X}$, равных $\boldsymbol{\lambda} = [0\,1\,0\,2]$, имеем $\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}) = f_q = 2$ (подчеркнуто), где q – порядковый номер элемента $\mathbf{F}$, найденный с помощью (4),

$$q = x_0 + k_0 x_1 + k_0 k_1 x_2 + k_0 k_1 k_2 x_3 = \lambda_0 + 2\,\lambda_1 + 4\,\lambda_2 + 8\,\lambda_3 = 18.$$

В свою очередь, при том же векторе $\boldsymbol{\lambda}$ находим значение 2 (подчеркнуто) функции f' по ее представлению $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ при $\boldsymbol{\lambda}' = [0\,1\,0]$ и значение операции $\otimes$ при $x_3 = 2$, которое также равно 2 (подчеркнуто). ♦

4.3. Редукция формул

Функция f', найденная с помощью процедуры 2, как правило, имеет большую значность, чем значность k, фигурирующая при описании процедуры 1.

Определение 15. Редукцией формулы вида (13) называется такое ее преобразование, при котором вектор значений редуцированной формулы отстоит на наименьшее расстояние от вектора значений исходной формулы, а значность функции f' не превосходит некоторого числа k. Редукция будет точной, если итоговая формула эквивалентна исходной, в противном случае – неточной.

Процедура 3. Редукция значности k формулы вида (13), заданной функцией f' с представлением $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ и операцией $\otimes$:

1) находим C – множество из s классов эквивалентности строк матрицы $\otimes$, $C = \{C(\mathbf{r}_0), C(\mathbf{r}_1), \ldots, C(\mathbf{r}_{s-1})\}$, относительно отношения эквивалентности $\equiv$,[37] где $\mathbf{r}_j$ ($j = \overline{0, s-1}$) – образцовые строки, разбивающие множество строк матрицы $\otimes$ на взаимно не пересекающиеся подмножества $C(\mathbf{r}_j)$;[38]

2) создаем из C вектор классов эквивалентности номеров строк $\mathbf{C}$, для этого:

– преобразуем классы $C(\mathbf{r}_j)$ во множества C_j ($j = \overline{0, s-1}$), состоящие не из эквивалентных строк, а из их номеров;

– выполняем сортировку множеств C_j в порядке невозрастания числа принадлежащих им элементов, в результате чего имеем вектор $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = [C_0\, C_1 \ldots C_{s-1}]$;

3) редуцируем операцию $\otimes$, т.е. преобразуем ее матрицу к виду, содержащему по одной строке из первых k классов $\mathbf{C}$ и модифицируем вектор $\mathbf{F}'$ следующим образом:

– t-я строка матрицы $\otimes$ является некоторой строкой $\mathbf{r}_t$ с номером из класса эквивалентности C_t ($t = \overline{0, k-1}$);

– каждый элемент $e < k$ вектора $\mathbf{F}'$ заменяем номером класса эквивалентности t таким, что $e \in C_t$;

---

[37] Здесь под классом эквивалентности $C(\mathbf{r})$ строки $\mathbf{r}$ понимается подмножество строк матрицы операции $\otimes$, эквивалентных $\mathbf{r}$, где отошение эквивалентости строк задано как рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение поэлементной эквивалентности строк, рассматриваемых, в свою очередь, как упорядоченные множества. При этом эквивалентность элементов определяется, как и ранее, с помощью отношения $\equiv$.

[38] Известно, что отношение эквивалентности разбивает множество на семейство непересекающихся подмножеств [28, с. 70].

– все элементы $e \geq k$ вектора $\mathbf{F}'$, классы эквивалентности C_j ($j = \overline{k, s-1}$) которых исключены из рассмотрения, заменяются на множества номеров $\{t \mid t < k\}$ классов эквивалентности C_t ($t = \overline{0, k-1}$), строки которых $\mathbf{r}_t$ отстоят на наименьшее расстояние от строк $\mathbf{r}_j$ с номерами исключенных классов C_j таких, что $e \in C_j$.[39] ♦

Пример 10. Выполним с помощью процедуры 3 редукцию формулы из примера 9. Пусть значность редукции k – сколь угодно большое число. Находим, что число классов эквивалентности строк матрицы операции $\otimes$ равно 7 при общем их числе, равном 8:

$$C_0 = \{0\},\ C_1 = \{1\},\ C_2 = \{2\},\ C_3 = \{3\},\ C_4 = \{4, 6\},\ C_5 = \{5\},\ C_6 = \{7\}.$$

Сортировка классов порождает вектор $\mathbf{C} = [C_4\ C_0\ C_1\ C_2\ C_3\ C_5\ C_6]$ из семи элементов. Так как число k не ограничено, то при модификации матрицы операции $\otimes$ используем все элементы $\mathbf{C}$. Для этого выполняем следующую замену элементов матрицы $\otimes$ в порядке следования множеств в $\mathbf{C}$: элементы $\{4, 6\}$ заменяем на 0, или $\{4, 6\} \to 0$; $0 \to 1$; $1 \to 2$; $2 \to 3$; $3 \to 4$; $5 \to 5$; $7 \to 6$. В итоге получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}' = [1\,2\,3\,4\,0\,5\,0\,6] \\ \mathbf{K}' = [2\,2\,2] \\ \mathbf{X}' = [x_0\ x_1\ x_2] \end{bmatrix} \underset{\otimes}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} x_3. \ ♦$$

Если в процессе редукции число строк в матрице операции меньше или равно k, то редукция будет точной, в противном случае – неточной. В предыдущем примере из-за отсутствия ограничений на k редукция оказалась точной. Рассмотрим теперь пример неточной редукции.

Пример 11. Выполним редукцию функции из примера 10, но уже при ограниченной значности редукции. Пусть $k = 3$. После преобразования операции $\otimes$ получаем формулу:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}' = [1\,2\,\{1\}\,\{12\}\,0\,\{1\}\,0\,\{1\}] \\ \mathbf{K}' = [2\,2\,2] \\ \mathbf{X}' = [x_0\ x_1\ x_2] \end{bmatrix} \underset{\otimes}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} x_3,$$

[39] Замена элементов матрицы предыдущей операции, не имеющих своих классов эквивалентности, на множества номеров выбранных классов объясняется тем, что могут существовать не один, а несколько классов эквивалентности, отстоящих на наименьшее расстояние от строки заменяемого элемента. В свою очередь, при последующей редукции этой операции из этих множеств используются только те элементы, которые минимизируют число классов эквивалентности строк матрицы этой операции.

где в фигурных скобках заданы значения функции, одинаково минимизирующие расстояние между вектором исходной и редуцированной формулы. После выбора одного из альтернативных значений элементов вектора $\mathbf{F}'$ получаем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}' = [121\ 10101] \\ \mathbf{K}' = [222] \\ \mathbf{X}' = [x_0 x_1 x_2] \end{bmatrix} \underset{\otimes}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} x_3 .$$

Вычисление этой формулы при всех возможных векторах значений переменных в порядке, задаваемом формулой (4), дает значение вектора $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G} = [010020202022020220220202],$$

который уже не равен вектору исходной функции $\mathbf{F}$. ♦

Если исходная таблица функции задана неполностью, то при редукции вместо отсутствующих значений функции подставляются знаки *, которые сопоставимы с любым другим значением, в том числе и с *. Если требуется выполнить аналитическую идентификацию функции с заданной точностью ε, то перед редукцией область определения исходной функции и области определения переменных разбиваются на конечное семейство непересекающихся подобластей, определяемых исходя из значения ε, а значения функции и переменных заменяются на номера подобластей, в которые они попадают.

Пример 12. Выполним с точностью $\varepsilon = 0{,}5$ редукцию значности $k = 3$ неполностью определенной функции, заданной в табл. 4.

Из таблицы видно, что функция f изменяется в диапазоне от $-0{,}5$ до 1,0, переменная x_0 – в диапазоне от 0,0 до 1,0, переменная x_1 – в диапазоне от $-2{,}0$ до $-1{,}0$, а переменная x_2 – в диапазоне от 0,0 до 1,5. После перехода от реальных значений функции и ее переменных к номерам подобластей получим дискретную функцию, заданную в табл. 4 в круглых скобках. Далее получаем ее представление $[\mathbf{F}\,\mathbf{K}\,\mathbf{X}]$:

$$\mathbf{F} = [12**0*02*120];\quad \mathbf{K} = [2\,2\,3];\quad \mathbf{X} = [x_0\ x_1\ x_2].$$

Найдем начальное приближение полученной функции

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}' = [0\,1\,2\,3] \\ \mathbf{K}' = [2\,2] \\ \mathbf{X}' = [x_0\ x_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 2 & * & 1 \\ * & 0 & 2 \\ * & 2 & 0 \end{bmatrix} x_2$$

и выполним редукцию по переменной x_2,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}' = [0\,1\,0\,2] \\ \mathbf{K}' = [2\,2] \\ \mathbf{X}' = [x_0\ x_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & * & 1 \\ * & 2 & 0 \end{bmatrix} x_2 .$$

Если редуцировать представления $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}']$ и доопределить неполностью определенные операции, то получим итоговую формулу[40]

$$\begin{bmatrix} -0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{bmatrix} \left(\left(x_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x_1 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x_2 \right),$$

где для восстановления исходной функции применена специальная унарная операция, преобразующая номера подобластей в средние значения соответствующих им интервалов. Понятно, что перед вычислением этой формулы исходные значения параметров объекта, выражаемых соответствующими переменными, подвергаются аналогичному, но обратному преобразованию.♦

4.4. Перестановка переменных

Число классов эквивалентности строк операции $\otimes$ в процедуре 3 зависит от последней переменной в исходном представлении $[\mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{X}]$. По этой причине перед редукцией будем искать такое представление $[\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{X}}]$, которое эквивалентно исходному, но приводит к минимизации числа классов эквивалентности строк искомой операции $\otimes$. Для этого будем изменять порядок переменных путем перестановки элементов в векторах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{K}$. Для сохранения эквивалентности представлений $[\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{X}}]$ и $[\mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{X}]$ необходимо некоторым образом изменить и сам вектор значений $\mathbf{F}$.

Процедура 4. Перестановка переменных в представлении $[\mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{X}]$:

1) пусть задана перестановка переменных $\mathbf{S}$,

$$\mathbf{S} = [s_i \mid s_i \in \mathbf{N}_n; s_i \not\equiv s_j \text{ при } i \neq j; i = \overline{0, n-1}];$$

2) применим перестановку $\mathbf{S}$ к векторам $\mathbf{K}$ и $\mathbf{X}$, в результате получим векторы $\tilde{\mathbf{K}}$ и $\tilde{\mathbf{X}}$ с одинаковой перестановкой их элементов;

3) выполним для каждого элемента f_q вектора значений $\mathbf{F} = [f_q \mid q = \overline{0, m-1}]$ следующие действия:

– найдем для q соответствующий вектор значений переменных $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_i \mid i = \overline{0, n-1}]$, для чего воспользуемся рекуррентным правилом (5) при исходном векторе значностей переменных $\mathbf{K}$;

– применим перестановку $\mathbf{S}$ к вектору $\boldsymbol{\lambda}$ и получим новый вектор $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$;

– вычислим для $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ новое значение индекса $\tilde{q}$, воспользовавшись формулой (4), но уже при векторе значностей переменных $\tilde{\mathbf{K}}$;

– запишем элемент f_q в позицию $\tilde{q}$ искомого вектора $\tilde{\mathbf{F}}$;

4) завершаем процедуру с новым представлением $[\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{X}}]$. ♦

---

[40] Заметим, что при синтезе формулы произошло доопределение исходной функции таким образом, что появилась возможность находить ее значение в точках области определения, не заданных в исходной таблице. Выполняемая при этом аппроксимация функции осуществляется из условия получения наиболее простого выражения, связывающего значение функции со значениями ее переменных. Следует обратить внимание на то, что аналогичным образом аппроксимируются и непрерывные функции. В этом случае восстановление пропущенных значений осуществляется из предположения о гладкости функции, что также является некоторым упрощением ее формульного выражения.

Пример 13. Для функции из примера 9 найдем ее представление после циклического сдвига вправо вектора переменных и их значностей, т.е. при $\mathbf{S} = [1\,2\,3\,0]$. Применение процедуры 4 к исходному представлению $[\mathbf{F\,K\,X}]$, где

$$\mathbf{F} = [0111202020\,22010020210202]; \quad \mathbf{K} = [2\,2\,2\,3]; \quad \mathbf{X} = [x_0\ x_1\ x_2\ x_3],$$

дает новое представление функции $[\widetilde{\mathbf{F}}\,\widetilde{\mathbf{K}}\,\widetilde{\mathbf{X}}]$:

$$\widetilde{\mathbf{F}} = [022100122121200012200002]; \quad \widetilde{\mathbf{K}} = [3\,2\,2\,2]; \quad \widetilde{\mathbf{X}} = [x_3\ x_0\ x_1\ x_2]. \ ♦$$

Теорема 4. Представление $[\widetilde{\mathbf{F}}\,\widetilde{\mathbf{K}}\,\widetilde{\mathbf{X}}]$, *полученное из представления* $[\mathbf{F\,K\,X}]$ *с помощью процедуры 4 при произвольной перестановке переменных* $\mathbf{S}$, *эквивалентно* $[\mathbf{F\,K\,X}]$.

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Рассмотрим теперь задачу нахождения наилучшей перестановки переменных $\mathbf{S}$ в представлении $[\mathbf{F\,K\,X}]$, которая минимизирует число классов эквивалентности строк операции $\otimes$ при редукции формулы $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'] \otimes x_i$, осуществляемой с помощью процедуры 3.

Процедура 5. Поиск наиболее близкой формулы значности k и вида $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'] \otimes x_i$ для функции f с представлением $[\mathbf{F\,K\,X}]$:

1) найдем с помощью процедуры 2 эквивалентную формулу g для функции f, $g = [\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'] \otimes x_t$, где x_t – последняя переменная в векторе $\mathbf{X}$;

2) выполняем с помощью процедуры 3 редукцию формулы g при заданной значности k;

3) подсчитываем и запоминаем $d(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ – расстояние между вектором $\mathbf{F}$ и вектором значений $\mathbf{G}$ формулы g;

4) если в последней позиции вектора $\mathbf{X}$ побывали все переменные, то переходим к шагу 5, иначе вычисляем с помощью процедуры 4 новое представление $[\mathbf{F\,K\,X}]$ при циклическом сдвиге переменных вправо и повторяем вычисления, начиная с шага 1;

5) выбираем перестановку переменных с наименьшим значением $d(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ и завершаем процедуру с формулой $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'] \otimes x_i$, соответствующей этой перестановке. ♦

Пример 14. Найдем наилучшую формулу для функции из примера 13. Для этого применим процедуру 5 к исходному представлению функции, а промежуточные результаты запишем в табл. 5, где неэквивалентные элементы вектора $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ подчеркнуты.

Восстановив вторую формулу для результата с расстоянием 3, имеем:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}' = [2\,0\,0\,1\,0\,1\,\{2\}\,1\,\{012\}\,\{1\}\,2\,0] \\ \mathbf{K}' = [2\,2\,3] \\ \mathbf{X}' = [x_2\ x_3\ x_0] \end{bmatrix} \underset{\otimes}{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} x_1. \ ♦$$

Так как существует $n!$ перестановок вектора $\mathbf{X}$ из n элементов, а в процедуре 5 анализируется только n циклических перестановок переменных, то актуальной представляется следующая теорема.

Теорема 5. Пусть задана формула $[\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'] \otimes x_i$, *полученная из представления* $[\mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{X}]$ *с помощью процедуры 2. Тогда число классов эквивалентности строк операции* $\otimes$ *не изменяется при перестановках переменных в* $[\mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{X}]$, *оставляющих на месте переменную* x_i.

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении.

Заметим, что использование в процедуре 5 только циклических перестановок переменных не является необходимым. Как видно из доказательства теоремы 5, можно использовать любые n перестановок, которые последовательно перемещают в последнюю позицию вектора $\mathbf{X}$ каждую из его n переменных.

4.5. Вычисление остатка

Если на шаге 4 процедуры 1 окажется, что получена формула g, которая не эквивалентна идентифицируемой функции f, т.е. вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $g = [\mathbf{F}'\mathbf{K}'\mathbf{X}'] \otimes x_i$ не равен вектору значений $\mathbf{F}$ функции f, то выполняется шаг 5, на котором находится бинарная операция $\oplus$ и остаточный вектор $\mathbf{F}''$ такие, что $\mathbf{G} \oplus \mathbf{F}'' = \mathbf{F}$.[41] Каким образом это выполняется, показывает следующая процедура.

Процедура 6. Построение операции $\oplus$ и остаточного вектора $\mathbf{F}''$ по векторам $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$:

1) находим число вхождений e_{st} упорядоченных пар $[s\,t]$ ($s, t = \overline{0, k-1}$) во множество $\{[f_i\, g_i] \mid i = \overline{0, m-1}\}$, порожденное векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, и строим матрицу $\tilde{\oplus} = [e_{st} \mid s, t = \overline{0, k-1}]$;

2) каждую строку $\mathbf{r}_s = [e_{st} \mid t = \overline{0, k-1}]$ матрицы $\tilde{\oplus}$ заменяем на перестановку номеров ее столбцов, переводящую элементы этой строки в монотонно невозрастающую последовательность, в результате чего получаем матрицу искомой операции $\oplus$;

3) формируем m уравнений вида $g_i \oplus f_i'' = f_i$ ($i = \overline{0, m-1}$) и после их решения[42] относительно f_i'' находим элементы остаточного вектора $\mathbf{F}''$, $\mathbf{F}'' = [f_0'' f_1'' \ldots f_{m-1}'']$. ♦

Пример 15. Найдем операцию $\oplus$ и остаточный вектор $\mathbf{F}''$ для неточно редуцированной формулы из примера 14. В качестве исходных данных для процедуры 6 имеем:

$$\mathbf{F} = [022020100102122020102012];$$

$$\mathbf{G} = [022020002002122020102012].$$

Подсчитаем число вхождений каждой пары элементов, встречающихся в одинаковых позициях векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, результаты подсчета представим в виде матрицы $\tilde{\oplus}$, а после замены строк этой матрицы на перестановки ее элементов, переводящие

[41] Будем считать, что бинарная операция $\circ$, определенная для элементов a_i и b_i ($i = \overline{0, m-1}$) векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, может быть применена и к самим векторам. В этом случае запись вида $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ обозначает вектор $\mathbf{C}$ такой, что $\mathbf{C} = [c_i \mid i = 0, m-1;\ c_i = a_i \circ b_i]$.

[42] Решение указанных уравнений всегда существует и единственно (см. теорему 6).

исходные строки в монотонно невозрастающие последовательности, получим искомую операцию $\oplus$:

$$\tilde{\oplus}=\begin{bmatrix}9&2&0\\0&3&0\\1&0&9\end{bmatrix};\quad \oplus=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}.$$

Из матрицы $\tilde{\oplus}$ видно, что пара $[i\ j]$ со значениями [0 0] повторяется 9 раз, [0 1] – 2 раза, [0 2] – 0 раз (первая строка $\tilde{\oplus}$) и так далее, а со значением [2 2] – 9 раз (последняя строка $\tilde{\oplus}$). Заметим также, что ни одна строка матрицы $\oplus$ не содержит двух одинаковых элементов. Следовательно, уравнение $a\oplus c=b$ при произвольных a и b имеет единственное решение относительно c.

Запишем теперь уравнение $\mathbf{G}\oplus\mathbf{F}''=\mathbf{F}$ для вычисления элементов остаточного вектора $\mathbf{F}''$. В результате решения этого уравнения имеем

$$\mathbf{F}''=[000000102100000000000000].$$

Из анализа вектора $\mathbf{F}''$ следует, что элемент 0 встречается 21 раз, элемент 1 – 2 раза, а элемент 2 – 1 раз, т.е. вектор числа вхождений элементов [21 2 1] является монотонно невозрастающим. ♦

Теорема 6. Пусть заданы два вектора $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{G}$ *с длиной* m *и значностью* k. *Тогда для группоида*[43] $[\mathbf{N}_k\ \oplus]$ *и остаточного вектора* $\mathbf{F}''$, *получаемых в процедуре 6, справедливы следующие высказывания:*

а) для любых элементов a *и* c *группоида* $[\mathbf{N}_k\ \oplus]$ *существует единственный принадлежащий ему элемент* b *такой, что* $a\oplus b=c$;

б) вектор $[e_s \mid s=\overline{0,k-1}]$, *составленный из чисел вхождений* $e_s\in\mathbf{N}_{m+1}$ *элементов* $s\in\mathbf{N}_k$ *в остаточный вектор* $\mathbf{F}''$, *является монотонно невозрастающим, т.е.* $e_t\geq e_s$ *для всех* $t\leq s$.

Доказательство теоремы 6 приведено в Приложении.

Таким образом, в конструируемом группоиде имеют решения уравнения вида $g_i\oplus f_i''=f_i$ относительно неизвестных f_i'', где g_i, f_i'' и f_i ($i=\overline{0,m-1}$) – элементы векторов $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}''$ и $\mathbf{F}$ соответственно. Более того, при вычислении остатка часто встречающиеся элементы остаточного вектора $\mathbf{F}''$ кодируются меньшими числами, а редко встречающиеся – большими. Если элемент не встретится ни разу, то он будет закодирован наибольшим числом, что равносильно снижению значности функции, выраженной вектором $\mathbf{F}''$. Все это в конечном итоге приводит к уменьшению сложности формулы f''.

4.6. Демонстрационный пример

Не повторяя разъяснений шагов процедуры 1, приведенных в ранее рассмотренных примерах, проиллюстрируем итоговый результат аналитической идентификации дискретной функции.

---

[43] Группоидом называется множество с одной бинарной операцией на нем.

Пример 16. Пусть задана функция из примера 1. Выберем значность искомой формулы, равную 3. Применив процедуру 1 к функции с представлением

$$\mathbf{F} = [0111202020\,2201002021\,0202], \quad \mathbf{K} = [2\,2\,2\,3], \quad \mathbf{X} = [x_0\; x_1\; x_2\; x_3],$$

имеем

$$((x_1 \otimes_0 (x_2 \otimes_1 (x_0 \otimes_2 x_3))) \oplus (x_1 \otimes_4 (x_0 \otimes_5 (x_3 \otimes_6 x_2)))),$$

где

$$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \otimes_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\otimes_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \otimes_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \otimes_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \oplus = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Если аналитическую идентификацию интерпретировать как синтез комбинационного автомата, то в рассмотренном выше примере ищется описание этого автомата, выраженное в двоичной и троичной логике ($k \le 3$). Полученная при этом формула может быть преобразована в схему из найденных логических элементов (операций). Однако при аналитической идентификации возможно появление операций, которые не реализованы в имеющемся в распоряжении исследователя наборе логических элементов.

Таким образом, компактность формул, получаемых при аналитической идентификации, достигается за счет отказа от фиксированного базиса операций и жесткой аналитической конструкции формул.

5. Оценка сложности

Рассмотрим каноническую аналитическую конструкцию (12) и найдем число применений продукций $\Psi \to ((\mathrm{X}\;\Theta\;\Psi)\;\Theta\;\Psi)$ при идентификации сложной дискретной функции.[44] Применив $t-1$ раз продукцию $\Psi \to ((\mathrm{X} \otimes \Psi) \oplus \Psi)$ и один раз продукцию $\Psi \to (\mathrm{X} \otimes \Psi)$ к последнему вхождению Ψ в получившуюся формулу, имеем

(15) $$\Psi \to ((\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1) \oplus_1 ((\mathrm{X}_2 \otimes_2 \Psi_2) \oplus_2 (\ldots \oplus_{t-1} (\mathrm{X}_t \otimes_t \Psi_t)\ldots))),$$

где различные вхождения операций $\otimes$ и $\oplus$, переменных X и подформул Ψ указаны с индексами, а t – число шагов идентификации.

Для упрощения выкладок далее будем предполагать, что идентифицируемая функция, ее переменные и синтезируемая формула имеют одинаковую значность, равную k.

Теорема 7. Максимальное число шагов идентификации $t_{\max}$ *произвольной дискретной функции значности* k *от* n *переменных значности* k *не более чем*

---

[44] Здесь под сложной дискретной функцией понимается функция, не выразимая формулами вида Δ, X и $\Xi\,\mathrm{X}$.

(16) $$k\frac{n-2}{n-1}.$$ [45]

Доказательство теоремы 7 приведено в Приложении.

Теперь, используя (16), оценим длину формул, синтезируемых с помощью процедуры 1.

Теорема 8. Максимальная длина формул $L_n(k)$, получаемых при идентификации произвольной дискретной функции значности k от n переменных значности k, не более чем

(17) $$\frac{2(k-1)^2+k}{k(k-1)^2}\frac{k^{n-1}}{n-1}-\frac{k}{(k-1)^2}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(k-1)}\frac{n-2}{n-1}-1.$$

Доказательство теоремы 8 приведено в Приложении.

В частности, при $n=3$ и $k=2$ из (17) имеем $L_3(2)=2$, т.е. для аналитической идентификации булевой функции трех переменных[46] достаточно двух операций, что подтверждается экспериментальными данными из табл. 6.[47]

Из (17) при $k=2$ может быть получена сложность идентификации булевых функций в конечной и асимптотической области по числу переменных n:

$$L_n(2)=\frac{2^n-n-1}{n-1},\ L_n(2)\sim\frac{2^n}{n}.$$

Известно, что длина формул $L_n(2)$ сложных булевых функций от n переменных удовлетворяет следующим оценкам [36, 37, 38]:[48]

$$\frac{1}{\log_2 3}\frac{2^n}{n}<L_n(2)<2(1+\log_2 n)\frac{2^n}{n},^{49}\quad L_n(2)\sim\frac{2^n}{n}.$$

Следовательно, разработанная теория аналитического синтеза формул является наилучшей, по крайней мере, для булевых функций.

---

[45] Дробное значение числа шагов идентификации следует интерпретировать как среднее число шагов, необходимых для идентификации сложных функций от заданного числа переменных.

[46] Проведение вычислительного эксперимента для всех функций при больших n сопряжено с непреодолимыми вычислительными трудностями. Однако из (16) видно, что при увеличении n максимальное число шагов идентификации $t_{\max}$ быстро стремиться к k. Следовательно, асимптотическое поведение $L_n(k)$ в значительной мере определяется длиной формул при малом числе переменных.

[47] Для рассмотрения всего множества булевых функций от трех переменных достаточно рассмотреть функции, заданные с точностью до инверсии переменных и инверсии самой функции. Инверсия переменных вызывает перестановку строк (столбцов) соответствующих операций, а инверсия функции – перестановку значений последней вычисляемой операции (см. пример 8).

[48] Функция $L_n(2)$ называется функцией Шеннона и определяется как $\max\min\omega_i$, где ω_i – число операций, необходимых для выражения i-й функции, а индекс i пробегает по номерам всех функций.

[49] Грубость верхней оценки, взятой из [37], вызвана тем, что при ее выводе применена аналитическая конструкция только с двумя бинарными булевыми операциями из 10 возможных – конъюнкцией и неэквиваленцией, а также использована константа 1 совместно с неэквиваленцией для выражения унарной операции отрицания, которая, как показано выше, является при идентификации функций избыточной. Более того, в аналитической конструкции формул из [37] используется жесткий порядок расстановки скобок, причем вложенность скобок ограничена.

6. Заключение

Рассмотренная в настоящей статье задача аналитической идентификации дискретных объектов востребована практикой и имеет постановку, отличающую ее от других похожих задач – непараметрической и параметрической идентификации, функциональных построений в конечных алгебрах и задачи анализа данных.

Отличительной особенностью разработанного метода идентификации является использование нового математического аппарата, основанного на редукции дискретной функции и ее последовательных приближениях, позволяющего в процессе идентификации вычислять не только операции в формуле функции, но и определять порядок переменных и места расстановки скобок.

Используемый математический аппарат позволяет также получать расчетные значения выходных параметров объекта при значениях его входных параметров, еще не встречавшихся в наблюдениях. Прогноз поведения объекта в этом случае осуществляется на основе аппроксимации (интерполяции и экстраполяции) неполностью определенной дискретной функции, осуществляемой при условии получения наиболее простой формулы, связывающей значения функции со значениями ее переменных.

Разработанная методика аналитической идентификации дискретных объектов подкреплена простым и эффективным алгоритмом синтеза формул дискретных функций с наилучшими оценками сложности как в конечной, так и в асимптотической области. Более того, получаемые формулы являются хорошо приспособленными для реализации на современных вычислительных средствах дискретного действия, так как состоят из последовательности дискретных операций над дискретными переменными.

Следует заметить, что описанный подход применим не только для идентификации дискретных объектов без памяти. Его объединение с конечно-автоматным формализмом позволяет выполнять идентификацию объектов, функционирующих во времени и тем самым изменяющих свое состояние. В этом случае процесс идентификации заключается в синтезе функции переходов, описывающей изменение текущего состояния объекта, и функций выходов, зависящих от текущего состояния и поставляющих значения выходных переменных модели.

В рамках конечно-автоматного подхода задача аналитической идентификации заключается в определении множества состояний автомата и таблиц для функций переходов и выходов. Предполагается, что входной и выходной алфавиты автомата заданы. В [39] доказано, что поведение автомата с q состояниями восстанавливается посредством кратного эксперимента длины $2q-1$. Другими словами, для полной и надежной идентификации конечного автомата необходимо подать на его вход все возможные входные последовательности длиной $2q-1$. При числе знаков во входном алфавите, равном p, таких последовательностей ровно p^{2q-1}.

Однако если число состояний автомата неизвестно, то его идентификация возможна лишь в пределе – на счетном множестве входных строк. Тем не менее если найден автомат с q' состояниями, описание которого не опровергается последующими испытаниями длины, большей чем $2q'-1$, то с большой степенью уверенности можно считать, что автомат идентифицирован.

Следует заметить, что прикладные задачи аналитической идентификации имеют ограниченную сложность и на практике удается избежать длительных экспериментов. Так в [32] показано, что для почти всех автоматов степень восстановления автомата по его поведению имеет порядок $\log q$, что значительно меньше величины $2q-1$. В свою очередь, доля автоматов, для которых не выполняется приведенная оценка, быстро стремится к нулю с ростом q.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1

А. Покажем, что любая формула конструкции Φ вида (7) тождественно преобразуется в формулу с конструкцией K вида (11). Для этого:

– найдем варианты вхождения констант Δ и унарных операций Ξ в формулы, порождаемые аналитической конструкцией Φ;

– установим эквивалентность таких вхождений другим комбинациям знаков;

– выведем новый вид аналитической конструкции формул, получаемых при тождественных преобразованиях исходных формул с учетом найденных эквивалентностей, и сравним ее с K.

1) Эквивалентности для вхождений констант Δ в формулу конструкции Φ:

a) $\Xi\ \Delta \sim \Delta$;[50]

b) $\Delta\ \Theta\ \Phi \sim \Xi\ \Phi$;

c) $\Phi\ \Theta\ \Delta \sim \Xi\ \Phi$;

d) $\Delta\ \Theta\ \Delta \sim \Delta$.

Эквивалентности a) и d) тривиальны. Докажем эквивалентность b). Пусть константа Δ равна δ, а операция Θ задана матрицей $\bullet$. Тогда δ равна номеру строки матрицы $\bullet$, которая используется при вычислениях $\delta \bullet \Phi$. Такое вычисление эквивалентно применению к результату вычисления подформулы Φ унарной операции $\neg$, вектор которой равен строке δ матрицы $\bullet$, т.е. $\delta \bullet \Phi = \neg\ \Phi$. Отсюда в силу произвольности выбора константы δ и матрицы $\bullet$ получаем $\Delta\ \Theta\ \Phi \sim \Xi\ \Phi$. Что и требовалось доказать. Эквивалентность c) доказывается аналогично.

Из анализа эквивалентностей a)-d) следует, что формула с аналитической конструкцией Φ тождественно преобразуется в формулу, не содержащую вхождения констант Δ, т.е. имеет аналитическую конструкцию Φ':

$$\Phi' \to \mathrm{X}\,; \quad \Phi' \to \Xi\ \Phi'; \quad \Phi' \to (\Phi'\ \Theta\ \Phi').$$

2) Эквивалентности для вхождения унарных операций Ξ в конструкцию Φ':

a) $\Xi\ \Xi\ \Phi' \sim \Xi\ \Phi'$;

b) $\Xi\,(\Phi'\ \Theta\ \Phi') \sim \Phi'\ \Theta\ \Phi'$;

c) $\Xi\ \Phi'\ \Theta\ \Phi' \sim \Phi'\ \Theta\ \Phi'$;

d) $\Phi'\ \Theta\ \Xi\ \Phi' \sim \Phi'\ \Theta\ \Phi'$;

e) $\Xi\ \Phi'\ \Theta\ \Xi\ \Phi' \sim \Phi'\ \Theta\ \Phi'$.

Докажем эквивалентность c). Пусть операции Ξ и Θ заданы вектором $\neg$ и матрицей $\bullet$. Выполним тождественные преобразования $\neg\ \Phi' \bullet \Phi'$ путем копирования строк матрицы $\bullet$ в матрицу новой операции $\circ$ в порядке, задаваемом элементами вектора

---

[50] Здесь под эквивалентностью двух строк понимается равенство множеств формул, получаемых из них с помощью продукций грамматики с учетом возможных тождественных преобразований этих формул.

$\neg$. В результате таких преобразований получаем $\neg\,\Phi' \bullet \Phi' = \Phi' \circ \Phi'$ и $\Xi\ \Phi'\ \Theta\ \Phi' \sim \Phi'\ \Theta\ \Phi'$. Остальные эквивалентности доказываются аналогично.

Из анализа эквивалентностей а)-е) следует, что формула с аналитической конструкцией из подпункта 1) тождественно преобразуется в формулу с конструкцией Φ'':

$$\Phi'' \to \mathrm{X}\,; \quad \Phi'' \to (\Phi''\ \Theta\ \Phi'').$$

После отождествления Φ'' и K получаем (11). На этом можно считать пункт А доказанным.

В. Каждое из рассмотренных выше тождественных преобразований не увеличивает длину формулы. Следовательно, итоговая формула имеет длину, меньшую или равную длине исходной формулы. ♦

Доказательство теоремы 2

Для доказательства теоремы достаточно показать, что грамматики, различающиеся множествами продукций $\Psi \to \mathrm{X}\,|(\Psi\ \Theta\ \Psi)$ и $\Psi \to \mathrm{X}\,|(\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)|((\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)\Theta\ \Psi)$ порождают одни и те же формулы. Доказательство осуществим индукцией по числу операций Θ в формуле. Предварительно заметим, что в обеих грамматиках имеется единственная продукция $\Psi \to \mathrm{X}$, порождающая терминальное вхождение переменной, а применение любой другой продукции может увеличить число операций в формуле на 1 в первой грамматике, и на 2 – во второй. Следовательно индуктивные рассуждения надо проводить для двух последовательных значений чисел операций n в формуле.

Непосредственно убеждаемся, что множества формул, порождаемых грамматиками, при $n = 0$ равны $\{\mathrm{X}\}$, при $n = 1$ – $\{(\mathrm{X}\Theta\mathrm{X})\}$ и при $n = 2$ – $\{((\mathrm{X}\Theta\mathrm{X})\Theta\mathrm{X}), (\mathrm{X}\Theta(\mathrm{X}\Theta\mathrm{X}))\}$.

Пусть множества формул двух грамматик равны при некотором n. Покажем, что эти множества будут равны и при $n+1$, и при $n+2$.

При $n+1$ в первой грамматике требуется на последнем шаге вывода вместо подстановки $\Psi \to \mathrm{X}$ выполнить единственно возможную последовательность подстановок $\Psi \to (\Psi\ \Theta\ \Psi) \to (\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi) \to (\mathrm{X}\ \Theta\ \mathrm{X})$. Во второй грамматике вместо подстановки $\Psi \to \mathrm{X}$ соответственно применяем $\Psi \to (\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi) \to (\mathrm{X}\ \Theta\ \mathrm{X})$.

При $n+2$ в первой грамматике на последнем шаге вывода выполним одну из следующих возможных подстановок:

$$\Psi \to (\Psi\ \Theta\ \Psi) \to ((\Psi\ \Theta\ \Psi)\Theta\ \Psi) \to \ldots \to ((\mathrm{X}\ \Theta\ \mathrm{X})\Theta\ \mathrm{X});$$

$$\Psi \to (\Psi\ \Theta\ \Psi) \to (\Psi\ \Theta(\Psi\ \Theta\ \Psi)) \to \ldots \to (\mathrm{X}\ \Theta(\mathrm{X}\ \Theta\ \mathrm{X})),$$

а во второй грамматике соответственно применяем:

$$\Psi \to ((\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)\Theta\ \Psi) \to \ldots \to ((\mathrm{X}\ \Theta\ \mathrm{X})\Theta\ \mathrm{X});$$

$$\Psi \to (\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi) \to (\mathrm{X}\ \Theta(\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)) \to (\mathrm{X}\ \Theta(\mathrm{X}\ \Theta\ \mathrm{X})).$$

Выполнен индуктивный переход, что доказывает теорему. ♦

Доказательство теоремы 4

Из построения следует, что для любого вектора значений переменных $\boldsymbol{\lambda}$ выполняется равенство $\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}) = \widetilde{\mathbf{F}}(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}})$, где $\widetilde{\mathbf{F}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$ – вектор функции и вектор значений переменных, найденные с помощью процедуры 4 при некоторой перестановке переменных $\mathbf{S}$. Равенство $\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}) = \widetilde{\mathbf{F}}(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}})$ здесь интерпретируется как равенство элементов векторов $\mathbf{F}$ и $\widetilde{\mathbf{F}}$, полученных при произвольных, но соответствующих друг другу векторах значений переменных $\boldsymbol{\lambda}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$, т.е. при одинаковых значениях переменных, но при разных их порядках размещения в векторах $\boldsymbol{\lambda}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$. Отсюда заключаем, что представления [$\mathbf{F}\,\mathbf{K}\,\mathbf{X}$] и [$\widetilde{\mathbf{F}}\,\widetilde{\mathbf{K}}\,\widetilde{\mathbf{X}}$] эквивалентны. ♦

Доказательство теоремы 5

Не нарушая общности, представим $\mathbf{X}=[x_0\, x_1 \ldots x_{n-2}\, x_{n-1}]$ как $[X'\, x_{n-1}]$, где X' – новая переменная, заменяющая переменные x_0, x_1, ..., x_{n-2} и имеющая значность $K' = k_0 k_1 \ldots k_{n-2}$. Тогда в соответствии с (14) для элементов p_{st} матрицы операции $\otimes$ имеем $p_{st} = f_q$, где q – индекс элемента из вектора значений функции ($q = s + K't$), s – индекс строки этого элемента в матрице $\otimes$, равный значению переменной X' ($s = \overline{0, K'-1}$), а t – индекс его столбца, равный значению переменной x_n ($t = \overline{0, k_n - 1}$).

Отсюда видно, что любая перестановка $\mathbf{S}$, не затрагивающая переменную x_n, изменяет (переставляет) строки элементов, но не изменяет их столбцы. Последнее означает, что число классов эквивалентности строк не зависит от рассматриваемого множества перестановок. Что и требовалось доказать. ♦

Доказательство теоремы 6

Действительно, на шаге 2 процедуры 6 конструируется группоид $[\mathbf{N}_k\, \oplus]$, матрица операции которого состоит из строк, равных перестановкам элементов множества $\mathbf{N}_k$. Тогда в каждой строке матрицы операции встречаются все элементы множества $\mathbf{N}_k$. Следовательно, какой бы ни был левый операнд a (индекс строки матрицы операции), найдется ровно один столбец (правый операнд b), в котором находится любое наперед заданное значение операции c (элемент строки a). Высказывание а) теоремы доказано.

Однако существует множество операций, соответствующих перестановкам элементов множества $\mathbf{N}_k$. Среди них на шаге 2 процедуры 6 выбирается такая операция, которая для более часто встречающихся пар операндов имеет меньшее значение, а для менее часто встречающихся – большее. Следовательно, вектор, составленный из чисел вхождений элементов $\mathbf{N}_k$ в результирующий вектор, является монотонно невозрастающим. Доказано высказывание б). ♦

Доказательство теоремы 7

Пусть значности всех операций в (15) будут равны k. Тогда длина вектора функции, выражаемого формулой Ψ, будет равна k^n, а формулами Ψ_i ($i = \overline{1, t}$) – k^{n-1}.

Подсчитаем число функций N_t от n переменных, выражаемых формулой (15) при различных t.

При $t=1$ формула имеет вид $\Psi \to (\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1)$, операция $\otimes_1$ состоит из k строк длины k, а матрица функции Ψ – из k^{n-1} строк длины k. Тогда число функций, выражаемых формулами вида $(\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1)$, равно числу вариантов составления матрицы Ψ из k строк, принадлежащих матрице операции $\otimes_1$, или

(П1)
$$k^{k^{n-1}} - N_0,$$

где $N_0 = k + n(k^k - k)$ – начальное условие, или число функций, выражаемых простыми формулами вида Δ, X и $\Xi\,\mathrm{X}$.[51]

При $t=2$ формула имеет вид $\Psi \to ((\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1) \oplus_1 (\mathrm{X}_2 \otimes_2 \Psi_2))$, а операции $\otimes_1$ и $\otimes_2$ совместно с операцией $\oplus_1$ порождают k^2 различных строк, из которых можно составлять матрицу функции Ψ. Тогда число функций, выражаемых такими формулами, равно

$$(k^2)^{k^{n-1}} - N_1,$$

за вычетом числа функций N_1, выражаемых формулой вида $(\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1)$.

Продолжая таким образом, при любом $t > 1$ имеем

$$N_t = k^{tk^{n-1}} - N_{t-1}.$$

Максимальное число шагов идентификации $t_{\max}$ найдем из условия выражения формулой вида (15) всех сложных функций, число которых $k^{k^n} - N_0$,

$$\sum_{t=1}^{t_{\max}} N_t = k^{k^n} - N_0,$$

откуда получаем $t_{\max} k^{n-1} \le k^n$ и $t_{\max} \le k$.

Из полученной оценки $t_{\max}$ следует сходимость процедуры аналитической идентификации. Однако при выводе этой оценки не были учтены перестановки переменных, выполняемые в процедуре 5.

Для учета влияния перестановок переменных рассмотрим формулу вида $\Psi \to (\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1)$ и будем искать число функций, выражаемых этой формулой, в следующем виде:

(П2)
$$\widetilde{k}^{k^{n-1}} - N_0,$$

где $\widetilde{k}$ – некоторое выражение, $\widetilde{k} > k$.[52] Из описания процедуры 5 следует, что каждый сдвиг переменных поочередно выводит одну переменную из множества переменных формулы Ψ_1 и вводит вместо нее другую. Тогда эффект, получаемый от сдвига переменных, можно представить как фиктивную зависимость формулы Ψ_1 не от $n-1$, а

---

[51] Число простых формул может быть найдено так. Формул Δ ровно k – по числу констант. Формула X является частным случаем формул $\Xi\,\mathrm{X}$, которых по каждой переменной ровно $k^k - k$ (число неконстантных векторов длины k).

[52] Может показаться, что число сложных функций, выражаемых формулой Ψ_1, не может превышать величину (П1). Однако следует учесть, что перестановки переменных позволяют породить множество различных векторов для одной и той же функции, что, собственно, и выражено формулой (П2).

от $n-2$ переменных, при сохранении длины вектора выражаемой ею функции, т.е. $\widetilde{k}^{n-2} = k^{n-1}$. В итоге имеем:

$$\widetilde{k} = \sqrt[n-2]{k^{n-1}} = k^{\frac{n-1}{n-2}}, \quad N_1 = k^{\frac{n-1}{n-2}k^{n-1}} - N_0 .$$

Повторяя рассуждения для остальных шагов идентификации, находим искомую формулу:

$$t_{\max} = \frac{n-2}{n-1}k . \ ♦$$

Доказательство теоремы 8

Из структуры формулы (15) и выражения (16) следует рекуррентное уравнение

(П3) $$L_n(k) = \frac{n-2}{n-1}k\left(L_{n-1}(k)+2\right)-1 ,$$ [53]

которое получено следующим образом. Из (15) видно, что на каждом шаге идентификации находятся две бинарные операции и подформула Ψ_i длины $L_{n-1}(k)$. Так как таких шагов не более чем $t_{\max}$, то $L_n(k)$ будет равно $t_{\max}(L_{n-1}(k)+2)-1$, где учтены вычисляемые на каждом шаге операции $\otimes$ и $\oplus$, за вычетом одной операции $\oplus$, которая на последнем шаге не вычисляется. После подстановки вместо $t_{\max}$ его значения из (16), получаем уравнение (П3).

Далее при очевидном начальном условии $L_2 = 1$ из (П3) получаем

$$L_n(k) = \frac{1}{k(n-1)}\left(2k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1}(i-1)k^{n-i}\right) - 1 ,$$

откуда непосредственно выводится искомая оценка (17) для $L_n(k)$. ♦

[53] Если при вычислениях по формуле (П3) получается дробное число операций, то его следует интерпретировать как среднее число операций, необходимых для идентификации сложных функций.

Список литературы

1. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. М.: Комкнига, 2007. 192 с.

2. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001. 319 с.

3. *Карабутов Н.Н.* Структурная идентификация систем: Анализ информационных структур. М.: МГИУ, 2008. 160 с.

4. *Перельман И.И.* Методология выбора структуры модели при идентификации объектов управления // АиТ. 1983. № 11. С. 5-29.

5. Справочник по теории автоматического управления / Под редакцией А. А. Красовского. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 712 с.

6. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.

7. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 448 с.

8. *Загоруйко Н.Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд. Ин-та математики, 1999. 270 с.

9. *Катковник В.Я.* Непараметрическая идентификация и сглаживание данных. Метод локальной аппроксимации. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. 336 с.

10. *Куржанский А.Б.* Задача идентификации – теория гарантированных оценок (обзор) // АиТ. 1991. № 4. С. 9–26.

11. *Ikonen E. Najim K.* Advanced Process Identification and Control. New York: Marcel Dekker, 2002. 316 p.

12. *Сейдж Э.П., Мелса Дж.Л.* Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974. 246 с.

13. *Heuberger P., Van den Hof P., Wahlberg B.* Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions. London: Springer, 2005. 397 p.

14. *Greblicky W., Pawlak M.* Nonparametric System Identification. Cambridge University Press, 2008. 402 p.

15. *Растригин Л.А., Маджаров Н.Е.* Введение в идентификацию объектов управления. М.: Энергия, 1977. 215 с.

16. *Фурасов В.Д.* Задачи гарантированной идентификации. М.: БИНОМ, Лаб. знаний, 2005. 150 с.

17. *Cassandras C.G., Lafortune S.* Introduction to Discrete Event Systems. Springer, 2008. 781 p.

18. *Masami Hagiya*. Discrete State Transition Systems on Continuous Space-Time: A Theoretical Model for Amorphous Computing // Proc. 7 Int. Conf. “Unconventional Computation” (UC 2008). Vienna, 2008. P. 117-129.

19. *Кузовков Н.Т., Карабанов С.В., Салычев О.С.* Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.

20. *Garnier H., Wang L.* Identification of Continuous-time Models from Sampled Data. Springer, 2008. 429 p.

21. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384с.

22. *Бибило П.Н.* Декомпозиция булевых функций (обзор) / Проектирование устройств логического управления. М.: Наука, 1985. С. 106-126.

23. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5-142.

24. *Яблонский С.В.* Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем / Проблемы кибернетики. Вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 75-122.

25. *Выхованец В.С.* Спектральные методы в логической обработке данных // АиТ. 2001. № 10. С. 28-53.

26. *Выхованец В.С.* Полиномиальная факторизация спектральных базисов // АиТ. 2004. № 12. С. 5-20.

27. *Куратовский К., Мостовой А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

28. *Белоусов А.И., Ткачев С.Б.* Дискретная математика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 744 с.

29. *Выхованец В.С.* Алгебраическая декомпозиция дискретных функций // АиТ. 2006. № 3. С. 20-56.

30. *Пентус А.Е., Пентус М.Р.* Теория формальных языков. М.: Изд-во при механ.-мат. факультете МГУ, 2004. 80 с.

31. *Рейуорд-Смит В.* Теория формальных языков. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.

32. *Трахтенброт Б.А., Бардзинь Я.М.* Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970. 400 с.

33. Машины Тьюринга и рекурсивные функции / Г.-Д. Эббинхауз, К. Якобс, Ф.-К. Ман. М.: Мир, 1972. 274 с.

34. *Барвайс Дж.* Введение в логику первого порядка. Справочная книга по математической логике. Ч.1. М.: Наука, 1982. 392 с.

35. *Эдельман С.Л.* Математическая логика. М.: Наука, 1975. 176 с.

36. *Even S., Kohavi I., Paz A.* On minimal modulo 2 sums of products for switching functions // IEEE Trans. Elect. Comput. 1967. P. 671-674.

37. *Кириченко К.Д.* Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. 2005. Т. 17, вып. 3. С. 80-88.

38. *Лупанов О.Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем / Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63-97.

39. *Мур Э.Ф.* Умозрительные эксперименты с последовательными машинами / Автоматы. М.: Иностр. лит., 1956. С. 179-210.

Таблица 1. Классы математических моделей

Состояние	Время	
	Непрерывное	Дискретное
Непрерывное	$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Q}(t), t)$ (непрерывные)	$\mathbf{Q}(t^{+}) = \mathbf{G}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Q}(t), t)$ (с дискретным временем [17])
Дискретное	$\mathbf{Q}^{+}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Q}(t), t)$ (с дискретным состоянием [18])	$\mathbf{Q}^{+}(t^{+}) = \mathbf{G}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Q}(t), t)$ (дискретные, или автоматные)

Таблица 2. Табличная форма дискретной функции

x_0	x_1	...	x_{n-1}	f
0	0	...	0	f_0
1	0	...	0	f_1
...	...	...	...	...
$k_0 - 1$	0	...	0	$f_{k_0 - 1}$
0	1	...	0	f_{k_0}
...	...	...	...	...
$k_0 - 1$	$k_1 - 1$	...	$k_n - 1$	f_{m-1}

Таблица 3. Пример неполностью определенной дискретной функции

x_0	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	0	2	1
1	0	1	2	2
1	1	1	2	2

Таблица 4. Неполностью определенная функция, заданная с точностью 0,5

x_0	x_1	x_2	f
0,2 (0)	-1,7 (0)	0,1 (0)	0,1 (1)
0,7 (1)	-1,8 (0)	0,0 (0)	0,9 (2)
0,3 (0)	-1,6 (0)	0,5 (1)	-0,4 (0)
0,1 (0)	-1,3 (1)	0,9 (1)	-0,1 (0)
0,6 (1)	-1,4 (1)	0,7 (1)	0,7 (2)
0,9 (1)	-1,9 (0)	1,1 (2)	0,3 (1)
0,4 (0)	-1,0 (1)	1,0 (2)	0,8 (2)
0,5 (1)	-1,1 (1)	1,4 (2)	-0,3 (0)

Таблица 5. Промежуточные результаты примера 14

X	**F**	**G**	$d(\mathbf{F},\mathbf{G})$
$[x_0\ x_1\ x_2\ x_3]$	[0111202020 2201002021 0202]	$[0\underline{2}112020\,\underline{1}022010\,\underline{1}20\,\underline{1}10202]$	4
$[x_3\ x_0\ x_1\ x_2]$	[022100122121200012200002]	$[022\underline{2}00122\underline{2}21200\underline{2}2200002]$	3
$[x_2\ x_3\ x_0\ x_1]$	[022020100102122020102012]	$[022020\underline{0}0\underline{2}\underline{0}02122020102012]$	3
$[x_1\ x_2\ x_3\ x_0]$	[012222002200110002100122]	$[0\underline{0}22220\underline{2}22001100\underline{0}100\underline{0}22]$	4

Таблица 6. Аналитическая идентификация булевых функций трех переменных

Функция	Операции	Функция	Операции
$\mathbf{F}=[00000001]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_0 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=[00001001]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{F}=[00000010]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=[00001010]$, $(x_2 \otimes_0 x_0)$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{F}=[00000011]$, $(x_2 \otimes_0 x_1)$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=[00001011]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{F}=[00000100]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=[00001100]$, $(x_2 \otimes_0 x_1)$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{F}=[00000101]$, $(x_2 \otimes_0 x_0)$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=[00001101]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_0 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{F}=[00000110]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=[00001110]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{F}=[00000111]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=[00001111]$, x_2	
$\mathbf{F}=[00001000]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=[00010000]$, $(x_2 \otimes_0 (x_1 \otimes_1 x_0))$	$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$