Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Аналитическая идентификация дискретных устройств

Выхованец В.С.

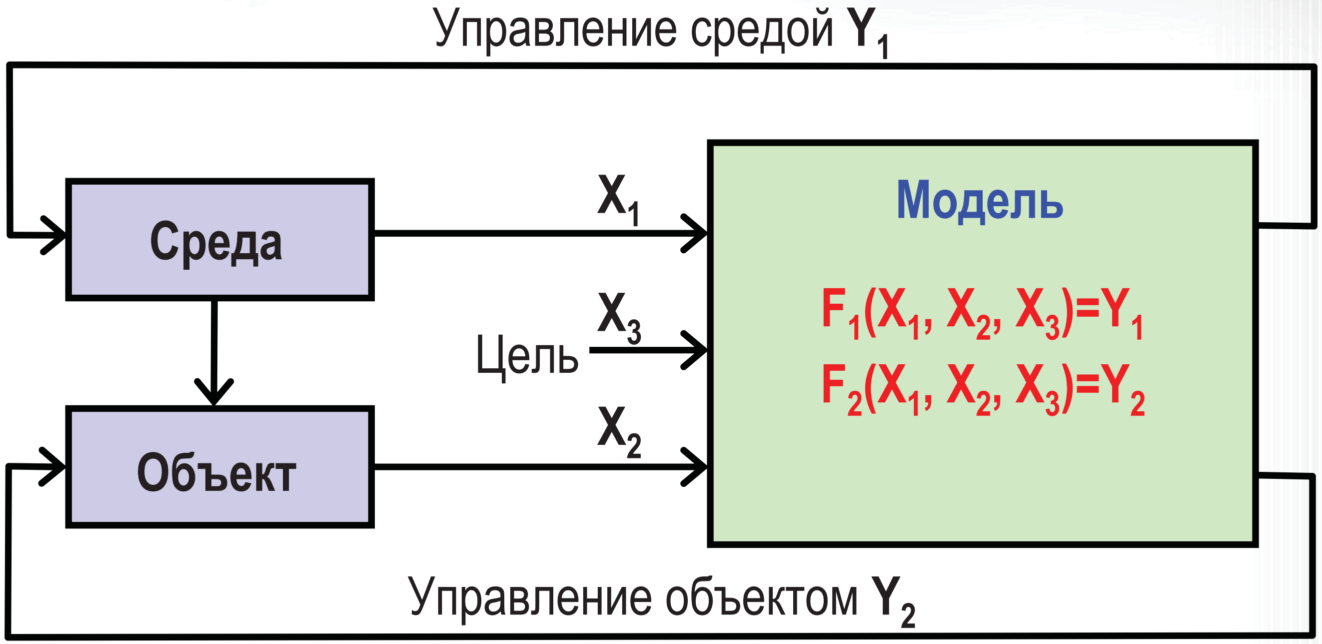
http://valery.vykhovanets.ru

Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения (УКИ'2010)

План доклада

- Дискретные модели
- Дискретные функции и операции
- Алгебраические построения
- Спектральный синтез
- Аналитическая идентификация
- Выводы

Дискретные модели



$$\mathbf{X} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \rightarrow$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$$

$$\begin{cases} f_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_0 \\ f_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{s-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_{s-1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \{y_0, y_1, \ldots, y_{s-1}\} = \mathbf{Y}$$

Дискретные функции

$$N_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

$$f(x):\ N_{k_x} \to N_{k_f}$$

$$f(x_0, x_0, \ldots, x_{n-1}):\ N_{k_0} \times N_{k_1} \times \ldots \times N_{k_{n-1}} \to N_{k_f}$$

x	$f(x)$
0	f_0
1	f_1
…	…
k-1	f_{k-1}

x_0	x_1	…	x_{n-1}	$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$
0	0	…	0	f_0
1	0	…	0	f_1
…	…	…	…	…
k_0-1	k_1-1	…	k_{n-1}-1	f_{k-1}

Примеры дискретных функций

x	$f(x)$
0	1
1	0
2	1
3	0

$$x \in N_4, \quad N_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f(x) \in N_2, \quad N_2 = \{0, 1\}$$

$$f(2) = 1$$

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	2
0	2	0	1
1	2	0	1
0	0	1	2
…	…	…	…
1	2	3	0

$$f(1, 1, 0) = 2$$

Дискретные операции

Унарные

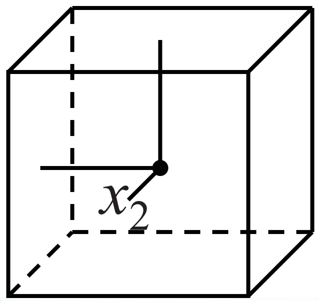
$$x_0 \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k_0-1 \end{array} \begin{bmatrix} o_0 \\ o_1 \\ \vdots \\ o_{k_0-1} \end{bmatrix} = o_{x_0}$$

Бинарные

$$\begin{array}{cc} & x_1 \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & k_1-1 \end{array} \\ x_0 \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ \dots \\ k_0-1 \end{array} & \begin{bmatrix} o_{00} & o_{01} & \cdots & o_{0,k_1-1} \\ o_{10} & o_{11} & \cdots & o_{1,k_1-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{k_0-1,0} & o_{k_0-1,1} & \cdots & o_{k_0-1,k_1-1} \end{bmatrix} \end{array} = o_{x_0 x_1}$$

Тернарные

x_1

x_0  $= o_{x_0 x_1 x_2}$

Примеры дискретных операций

Унарная

$$x\begin{array}{c|c|}0 & 1\\1 & 2\\2 & 3\\3 & 0\end{array} = \neg x$$

$$\neg 1 = 2$$

Бинарная

$$\begin{array}{cc} & x_1 \\ x_0 & \begin{array}{c|cc|} & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\end{array} = x_0 \oplus x_1$$

$$1 \otimes 1 = 0$$

Тернарная

$$x_0\,?\,x_1 : x_2 = \begin{cases} x_1, & x_0 \neq 0 \\ x_2, & x_0 = 0 \end{cases}$$

$$1?0:1 = 0$$

Алгебраические построения

$$? x_0 \,\&\, ? x_1 \,\&\, ? x_2 = 1$$

x_0	x_1	x_2	f
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

$$\neg = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \& = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vee = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(X) &= x_0 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \,\vee \\ &\vee\ x_0 \,\&\, x_1 \,\&\, \neg x_2 \,\vee \\ &\vee\ x_0 \,\&\, x_1 \,\&\, x_2 \end{aligned}$$

$$x \,\&\, y = y \,\&\, x, \quad x \vee y = y \vee x$$

$$x \,\&\, (y \,\&\, z) = x \,\&\, (y \,\&\, z)$$
$$x \vee (y \vee z) = x \vee (y \vee z)$$

$$x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$$
$$x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$$

$$x \vee \neg x = 1, \quad x \,\&\, 1 = x$$

$$f(X) = x_0 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \ \vee\ x_0 \,\&\, x_1$$

Алгебраический подход

- Необходимость исследования функционально полных множеств операций и выявления их свойств
- Отсутствие единого подхода к синтезу формульных представлений дискретных функций
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом возможных преобразований
- Ограниченное число исследованных функционально полных базисов операций

Спектральный метод

$$f(x_0,x_1,\dots,x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(x_0,x_1,\dots,x_{n-1}) \times h_i$$

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(X) \times h_i$$

$$g_i(X) = g_{iX}, \quad X \in N_m, \quad m = k_0 k_1 \dots k_{n-1}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} g_0(X) & g_1(X) & \dots & g_{m-1}(X) \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} g_{00} & g_{10} & \cdots & g_{m-1,0} \\ g_{01} & g_{11} & \cdots & g_{m-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{0,m-1} & g_{1,m-1} & \cdots & g_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c c} & h_i \\ \begin{array}{c} i \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} h_0 \\ h_0 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & f(X) \\ \begin{array}{c} X \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \times \mathbf{H} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{D} \times \mathbf{F} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{G}^{-1}$$

Спектральный базис

$$+=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\quad \times=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}\quad \otimes=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}\quad *=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lclccc}
 & & & X & x_0 & x_1 \\
g_0 & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\
g_1 & = & x_0 & 1 & 1 & 0 \\
g_2 & = & x_1 & 2 & 0 & 1 \\
g_3 & = & x_0 \times x_1 & 3 & 1 & 1 \\
g_4 & = & x_0 \otimes x_1 & 4 & 0 & 2 \\
g_5 & = & x_1 * x_0 & 5 & 1 & 2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\1&1&2&2&2&1\end{bmatrix}^{-1}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\2&0&1&0&0&0\\1&2&2&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}
\end{array}$$

Спектральный синтез

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad * = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcc} & & \\ g_0 & = & 1 \\ g_1 & = & x_0 \\ g_2 & = & x_1 \\ g_3 & = & x_0 \times x_1 \\ g_4 & = & x_0 \otimes x_1 \\ g_5 & = & x_1 * x_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & x_0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{array} \begin{array}{c} d_0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} X \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} f \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} i \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} h \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$f(x_0, x_1) = x_0 + x_0 \times x_1 + x_1 * x_0 \times 2$$

Спектральный подход

- Необходимость предварительного синтеза формул спектральных функций
- Необходимость проверки совместимости спектральных функций (вычисление определителей)
- Необходимость вычисления обратных функций (обращение матриц)
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом спектральных базисов

Аналитическая идентификация

$$\Phi \to \Delta \,|\, \mathrm{X} \,|\, \Xi\Phi \,|\, (\Phi\Theta\Phi)$$

$$\Phi \to \Delta \,|\, \Xi\mathrm{X} \,|\, \Psi; \qquad \Psi \to \mathrm{X} \,|\, (\mathrm{X}\Theta\Psi) \,|\, ((\mathrm{X}\Theta\Psi)\Theta\Psi)$$

$$\begin{cases} \mathrm{var}\ \Theta; \\ \min \Theta. \end{cases}$$

Представление функций

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	2	0	0
1	2	0	1
0	0	1	1
…	…	…	…
1	2	3	0

$\mathbf{X} = [x_0\ x_1\ x_2]$, $\mathbf{K} = [323]$, $\mathbf{F} = [011101102010201020]$

Редукция функций

$$\mathbf{K}=[323],\quad \mathbf{F}=[011101102010201020]$$

$$x_0\underset{\circ 0}{\overset{x_1}{\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}}}\ \underset{\circ 1}{\overset{x_2}{\begin{bmatrix}0 & 6 & 12\\ 1 & 7 & 13\\ 2 & 8 & 14\\ 3 & 9 & 15\\ 4 & 10 & 16\\ 5 & 11 & 17\end{bmatrix}}},\qquad x_0\underset{\circ 0}{\overset{x_1}{\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}}}\ \underset{\circ 1}{\overset{x_2}{\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}}}$$

$$C_0=\{0,4\}$$

$$C_1=\{1,3,5\}$$

$$C_2=\{2\}$$

$$\downarrow$$

$$k=3$$

$$f(\mathbf{X})=x_0\underset{\circ 0}{\overset{x_1}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}}}\ \underset{\circ 1}{\overset{x_2}{\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}}},\qquad f(\mathbf{X})=x_0\circ_0 x_1\circ_1 x_2$$

Остаточный вектор

$$\mathbf{K} = [2223], \quad \mathbf{F} = [011120202022010020210202]$$

$$k = 3 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cc} & x_0 \\ x_3 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \circ_{00} \begin{array}{cc} & x_1 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ * & 2 \\ 1 & * \end{bmatrix} \end{array} \circ_{01} \begin{array}{cc} & x_2 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \circ_{02},$$

$$\begin{array}{cc} & x_0 \\ x_3 & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \circ_{00} \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \circ_{01} \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \circ_{02} \rightarrow g_0$$

$$f(\mathbf{X}) = g_0(\mathbf{X}) \oplus f_1(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{G}_0 = [022100222122200022000000]$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{G}_0 = [022100122121200012200002]$$

Многошаговое приближение

$$\mathbf{K} = [2223],\ \ \mathbf{F}_1 = [022100122121200012200002]$$

$$\begin{array}{cccc} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \circ_{10} & \circ_{11} & \circ_{12} \end{array} \rightarrow g_1(X)$$

$$\mathbf{G}_1 = [000002000020000020200002]$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_1 = [000000000000000000000000]$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1, \qquad f(\mathbf{X}) = g_0(\mathbf{X}) + g_1(\mathbf{X})$$

$$f(\mathbf{X}) = x_3 \circ_{00} x_0 \circ_{01} x_1 \circ_{02} x_2 \ + \ x_3 \circ_{10} x_0 \circ_{11} x_1 \circ_{12} x_2$$

Синтез группоида

$$\mathbf{F} = [011120202022010020210202]$$

$$\mathbf{G}_0 = [022100222122200022000000]$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & f & \\ & & 0 & 1 & 2 \\ \hline & 0 & 6 & 2 & 4 \\ g & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 3 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & f & \\ & & 0 & 1 & 2 \\ \hline & 0 & 0 & 2 & 1 \\ g & 1 & 1 & 0 & 2 \\ & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{G}_0 = [022010000200110001011101]$$

0 – 13 вхождений
1 – 8 вхождений
2 – 3 вхождения

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{G}_0 = [022100122121200012200002]$$

0 – 10 вхождений
1 – 5 вхождений
2 – 9 вхождения

Демонстрационный пример

$$\mathbf{X} = [x_0 x_1 x_2 x_3] \qquad \mathbf{K} = [2223] \qquad \mathbf{F} = [0111202020\ 2201002021\ 0202]$$

$$f(\mathbf{X}) = ((x_1 \otimes_0 (x_2 \otimes_1 (x_0 \otimes_2 x_3))) \oplus (x_1 \otimes_4 (x_0 \otimes_5 (x_3 \otimes_6 x_2))))$$

$$\otimes_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \otimes_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \otimes_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\otimes_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \otimes_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \otimes_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\oplus = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Оценка сложности формул

$$\mathbf{X}=[x_0x_1\ldots x_n] \quad \mathbf{K}=[kk\ldots k] \quad \mathbf{F}=[01\ldots k-1]$$

$$\Psi \rightarrow \underbrace{((\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1) \oplus_1 ((\mathrm{X}_2 \otimes_2 \Psi_2) \oplus_2 (\ldots \oplus_{t-1} (\mathrm{X}_t \otimes_t \Psi_t)\ldots)))}_{L}$$

$$L_n(k)=\frac{2k^2-3k+2}{k(k-1)^2}\frac{k^{n-1}}{n-1}-\frac{k}{(k-1)^2}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(k-1)}\frac{n-2}{n-1}$$

$$L_\infty(2)\sim\frac{2^n}{n}$$

Выводы

- Исследованы известные методы идентификации дискретных функций: алгебраический, спектральный и новый аналитический
- Определены достоинства и недостатки каждого из перечисленных методов
- Показано, что наиболее эффективным является аналитический метод
- Найдены оценки максимальной сложности формул, синтезируемых аналитическим методом