Труды 2-й Российской конференции с международным участием "Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения" (УКИ-2010). Москва: Институт проблем управления РАН, 2010

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ

В.С. Выхованец

Институт проблем управления РАН, Москва, Россия

Ключевые слова: дискретное устройство, аналитическая идентификация, аналитический синтез формул, оценка сложности формул.

Введение

В отличие от большинства работ по функциональному синтезу задача аналитической идентификации имеет другую постановку, при которой с целью получения эффективных описаний дискретных устройств переменные и функции принимают значения на произвольных конечных множествах, а операции вычисляются в процессе самого синтеза.

Например, в логическом управлении рассматривается единое множество значений для всех переменных и функций, а функциональные построения осуществляются в заданном базисе операций [1]. При исследовании конечных универсальных алгебр изучается только классификация и строения алгебраических систем, а задача нахождения алгебраических операций с требуемыми свойствами не ставится [2].

Обычно под идентификацией понимается процесс порождения нового знания о реальном объекте (процессе, явлении), выраженного в форме модели, описывающей его поведение. Следует различать аналитическую и параметрическую (синтетическую) идентификацию. При параметрической идентификации вид формальной модели известен заранее, а в процессе идентификации осуществляется нахождение только значений некоторого множества ее элементарных формул (параметров модели). При аналитической идентификации наоборот, вид формальной модели заранее неизвестен, т.е. в процессе идентификации требуется определить не только элементарные формулы, но и их строение.

Рассмотрим задачу аналитической идентификации дискретных объектов, которая заключается в построении ее формальной модели. Формальную модель будем задавать в виде упорядоченного множества формул дискретных функций, т.е. функций, принимающих значения на конечных множествах элементов. Будем предполагать, что преобразование представлений о реальном объекте в упорядоченное множество функциональных отображений выполняется исходя из содержательной постановки решаемой прикладной задачи. В этом случае объект представляется как дискретное устройство, задаваемое таблицами дискретных функций, а каждая переменная выражает соответствующее свойство объекта.

В настоящей статье исследуется идентификация дискретных устройств, сведенная к аналитической декомпозиции дискретных функций, где под аналитической декомпозицией понимается представление дискретной функции скобочной формулой в базисе произвольных бинарных операций. Приводится методика аналитической идентификации, позволяющая получать наилучшие формулы для подавляющего большинства функций. Описана процедура синтеза формул, основанная на вычислении бинарных операций и мест расстановки скобок. Приводятся оценки сложности синтезируемых моделей.

1. Аналитические конструкции формул

Введем обозначения для семейства множеств $\mathbf{N}^k$ таких, что при $k=0$ имеем $\mathbf{N}^0=[0,1,2,\ldots]$ – линейно упорядоченное множество натуральных чисел, а при $k\neq 0$ получаем $\mathbf{N}^k=[0,1,\ldots,k-1]$ – линейно упорядоченные множества k первых чисел множества $\mathbf{N}^0$, где k также принадлежит $\mathbf{N}^0$.

Пусть дискретная функция f принимает значения на множестве $\mathbf{N}^{k_f}$ и зависит от переменных $\mathbf{X}=[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]$, принимающих значения на множествах $\mathbf{N}^{k_0}$, $\mathbf{N}^{k_1}$, …, $\mathbf{N}^{k_{n-1}}$ соответственно.

1.1. Общая аналитическая конструкция

При синтезе формул дискретных функций используются различные аналитические конструкции, задающие строение этих формул. Для описания предельно общей аналитической конструкции Φ воспользуемся грамматической формой:

(1) $$\Phi \to \Delta \mid \mathrm{X} \mid \Xi\ \Phi \mid (\ \Phi\ \Theta\ \Phi\ ),$$

где Φ – конструируемая формула, или аксиома грамматики; $\to$ – знак вывода (текстовой замены); Δ – вхождение константы, выражаемой произвольным элементом $\mathbf{N}^k$ при некотором фиксированном k; X – вхождение переменной, выражаемой произвольным элементом $\mathbf{X}$; Ξ (Θ) – вхождение произвольной унарной (бинарной) операции, а вертикальная черта используется для разделения правых частей правил вывода (после знака $\to$), имеющих одинаковую левую часть (до знака $\to$).

Пример 1. Выведем одну из формул, описываемых конструкцией (1):

$$\Phi \xrightarrow{4} (\ \Phi\ \Theta\ \Phi\ ) \xrightarrow{3} (\ \Xi\ \Phi\ \Theta\ \Phi\ ) \xrightarrow{4} (\ \Xi\ \Phi\ \Theta\ (\ \Phi\ \Theta\ \Phi\ )) \xrightarrow{3}$$
$$\xrightarrow{3} (\ \Xi\ \Phi\ \Theta\ (\ \Xi\ \Phi\ \Theta\ \Xi\ \Phi\ )) \xrightarrow{2} (\ \Xi\ \mathrm{X}\ \Theta\ (\ \Xi\ \mathrm{X}\ \Theta\ \Xi\ \mathrm{X}\ )),$$

где сверху над знаком вывода указан номер применяемого правила. После замены вхождений нетерминальных знаков Ξ, X и Θ на выражающие их термы, получим итоговую формулу

$$(\neg_0 x_0 \bullet_0 (\neg_1 x_1 \bullet_1 \neg_2 x_2)),$$

где $\neg_i$ ($i = \overline{0,2}$) – знаки унарных операций, $\bullet_j$ ($j = \overline{0,1}$) – знаки бинарные операции, x_t ($t = \overline{0,2}$) – переменные из $\mathbf{X}$.

Определим теперь операции виде следующих векторов и матриц:

$$\neg_0 = \begin{bmatrix} \underline{1} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ \neg_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \underline{1} \end{bmatrix},\ \ \neg_2 = \begin{bmatrix} \underline{1} \\ 0 \end{bmatrix},\ \ \bullet_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \underline{0} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \ \bullet_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \underline{0} \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

где значности операций в порядке их перечисления равны 3, 2, 2, 3 и 3. После подстановки векторов и матриц в выведенную формулу получим

(2) $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 \right). \ \blacklozenge$$

1.2. Каноническая аналитическая конструкция

Определение 1. Канонической будем называть формулу, имеющую аналитическую конструкцию K:

(3) $$\mathrm{K} \to \Delta \mid \Xi\ \mathrm{X} \mid \Psi\ ; \quad \Psi \to \mathrm{X} \mid (\ \Psi\ \Theta\ \Psi\ ),$$

где Δ – вхождение константы, X – вхождение переменной, Ξ (Θ) – вхождение унарной (бинарной) операции, Ψ – каноническая подформула.

Определение 2. Две формулы эквивалентны, если они выражают одну и ту же функцию.

Теорема 1. Для любой формулы конструкции (1) с длиной l существует эквивалентная ей формула с канонической аналитической конструкцией (3) и длиной, не превосходящей l.

Определение 3. Аналитические конструкции эквивалентны, если множества порождаемых ими формул равны.

Теорема 2. Каноническая аналитическая конструкция (3) эквивалентна модифицированной канонической аналитической конструкции M:

(4) $$\mathrm{M} \to \Delta \mid \Xi\ \mathrm{X} \mid \Psi\ ; \quad \Psi \to \mathrm{X} \mid (\ \mathrm{X}\ \Theta\ \Psi\ ) \mid ((\ \mathrm{X}\ \Theta\ \Psi\ )\ \Theta\ \Psi\ ).$$ [1]

---

[1] Справедливо более сильное утверждение относительно конструкции M. Можно показать, что конструкция K эквивалентна конструкции M, в которой вхождение переменной X в подформулу ($\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi$) означает отсутствие вхождений этой переменной в Ψ. Однако такая конструкция выражается контекстно-зависимой грамматикой и плохо обозрима.

Для приведения формулы общего вида (1) к представлению (4) воспользуемся алгоритмом, который поясним на примере.

Пример 2. Выполним канонизацию формулы (2) с общей аналитической конструкцией. Из (2) находим, что применение унарной операции $\neg_1$ к переменной x_1 эквивалентно такому преобразованию бинарной операции $\bullet_2$, при котором вместо нулевой строки ее матрицы берется строка 1, вместо первой строки – строка 0, а вместо второй строки копируется строка 1. В результате описанных преобразований имеем

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\left(x_1 \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x_2 \right).$$

В свою очередь выполнение унарной операции $\neg_2$ эквивалентно перестановке столбцов матрицы операции $\bullet_2$,

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\left(x_1 \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} x_2 \right).$$

Проанализируем теперь бинарную операцию в круглых скобках. Находим, что ее значность равна 2. Следовательно, при вычислениях следующей бинарной операции (расположена слева от скобок) используются только первые два ее столбца. Поэтому последний столбец может быть удален, что эквивалентно снижению значности этой операции,

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} x_0 \begin{bmatrix}2&0\\0&2\\1&1\end{bmatrix}\left(x_1 \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} x_2 \right).$$

В свою очередь унарная операция $\neg_0$ вызывает перестановку строк [1 2 0] бинарной операции $\bullet_1$,

$$x_0 \begin{bmatrix}0&2\\1&1\\2&0\end{bmatrix}\left(x_1 \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix} x_2 \right)$$

В итоге получаем каноническую формулу $x_0 \circ_1 (x_1 \circ_2 x_2)$, где

$$\circ_1 = \begin{bmatrix}0&2\\1&1\\2&0\end{bmatrix},\ \circ_2 = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

2. Аналитический синтез

Пусть функция f значности k_f задана вектором значений $\mathbf{F}$, вектором значностей переменных $\mathbf{K}$ и вектором их знаков (имен, обозначений) $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{F} = [f_q \mid f_q \in \mathbf{N}^{k_f};\ q = \overline{0, m-1}];\ \ \mathbf{K} = [k_i \mid k_i \in \mathbf{N}^0;\ i = \overline{0, n-1}];\ \ \mathbf{X} = [x_i \mid i = \overline{0, n-1}], \qquad (5)$$

где для корректного задания функции выполняется следующее условие:

$$m = \prod_{i=0}^{n-1} k_i . \qquad (6)$$

2.1. Исходное представление

Установим стандартное взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbf{\Lambda}$, состоящим из m векторов значений переменных вида $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_i \mid \lambda_i \in \mathbf{N}^{k_i};\ k_i \in \mathbf{K};\ i = \overline{0, n-1}]$ и вектором функции $\mathbf{F}$, следующим образом:

(7) $$\mathbf{F}[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = f_q, \quad q = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \prod_{j=0}^{i-1} k_j,$$

куда при вычислениях вместо вхождений знаков переменных x_i подставляются их значения λ_i.

Для обратного преобразования индекса элемента $q \in \mathbf{N}^m$ в вектор значений переменных $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_i \mid i = \overline{0, n-1}]$ воспользуемся рекуррентным правилом

(8) $$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= q_i \operatorname{mod} k_i; \\ q_{i+1} &= q_i \operatorname{div} k_i; \end{aligned}\right\} \quad (i = \overline{0, n-1})$$

с начальным условием $q_0 = q$.

Определение 4. Представлением функции f называется упорядоченное множество $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$, где $\mathbf{F}$ – вектор значений функции, $\mathbf{K}$ – вектор значностей переменных, $\mathbf{X}$ – вектор знаков переменных.

Пример 3. Приведем представление $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$ функции f, задающей первые 24 десятичные цифры числа $\pi \approx 3.14159265358979323846265$, взятые по модулю 3, где

(9) $$\mathbf{F} = [0111202020\,2201002021\,0202], \quad \mathbf{K} = [2223], \quad \mathbf{X} = [x_0 x_1 x_2 x_3].$$

2.2. Процедура синтеза

Определение 5. Пусть заданы два вектора равной длины $\mathbf{F} = [f_i \mid i = \overline{0, m-1}]$ и $\mathbf{G} = [g_i \mid i = \overline{0, m-1}]$. Расстоянием между $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ относительно отношения эквивалентности элементов векторов $\equiv$ называется значение функции $d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \in N^m$, равное количеству элементов $\mathbf{F}$, не эквивалентных соответствующим элементам $\mathbf{G}$,

$$d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \sum_{i=0}^{m-1} \delta(f_i, g_i), \quad \delta(a, b) = \begin{cases} 0, & a \equiv b; \\ 1, & a \not\equiv b. \end{cases}$$

Алгоритм 1. Аналитический синтез канонической формулы дискретной функции f, заданной представлением $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$:

1) если $\mathbf{F} = [c\,c \dots c]$, т.е. вектор функции состоит из константы c, то завершаем алгоритм с формулой c (первое правило аналитической конструкции 4);

2) если $\mathbf{X} = [x_i]$, то завершаем алгоритм с формулой x_i при $\mathbf{F} = [0\,1 \dots k_i - 1]$ (второе правило из 4), или $\neg x_i$ – в противном случае (третье правило), где k_i – значность переменной x_i, $\neg$ – искомая унарная операция, $\neg = [c_s \mid c_s = f_s; s = \overline{0, k_i - 1}]$, а f_s ($s = \overline{0, k_i - 1}$) – элементы вектора $\mathbf{F}$;

3) в противном случае найдем переменную $x_i \in \mathbf{X}$, бинарную операцию $\otimes$ и представление $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ функции f' такие, что вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $x_i \otimes f'$ отстоит на наименьшее расстояние d от вектора $\mathbf{F}$ (четвертое правило);

4) если $d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = 0$, то завершаем алгоритм с формулой $(x_i \otimes f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'])$, которую предварительно канонизируем, где $f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ – рекурсивный вызов настоящего алгоритма для функции f' с представлением $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ (пятое правило);

5) если $d(\mathbf{F}, \mathbf{G}) > 0$, то найдем бинарную операцию $\oplus$ и представление $[\mathbf{F}'', \mathbf{K}'', \mathbf{X}'']$ функции f'' такие, что вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $(x_i \otimes f') \oplus f''$ равен вектору $\mathbf{F}$ (шестое правило); завершаем алгоритм с формулой $((x_i \otimes f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']) \oplus f[\mathbf{F}'', \mathbf{K}'', \mathbf{X}''])$, которую предварительно канонизируем, где $f[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ – рекурсивный вызов настоящего алгоритма для функции f' с представлением $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$, а $f[\mathbf{F}'', \mathbf{K}'', \mathbf{X}'']$ – для функции f'' с представлением $[\mathbf{F}'', \mathbf{K}'', \mathbf{X}'']$. ♦

Шаги 1 и 2 алгоритма 1 тривиальны. Разъяснение остальных шагов алгоритма приведено далее.

2.3. Начальное приближение

На шаге 3 алгоритма 1 выделяется некоторая переменная x_i и находится операция $\otimes$ и функция f' с представлением $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ такие, что вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $g = x_i \otimes f'$ отстоит на наименьшее расстояние от исходного вектора $\mathbf{F}$. Предварительно найдем такое представление $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}']$ функции f' и операцию $\otimes$, что $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ – вектор значений формулы g,

(10) $$g=[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']\otimes x_i,\quad x_i\in\mathbf{X},\quad x_i\notin\mathbf{X}'.$$ [2]

Алгоритм 2. Синтез формулы вида (10) для функции f, заданной представлением $[\mathbf{F},\mathbf{K},\mathbf{X}]$:

1) пусть x_i – последняя переменная в векторе $\mathbf{X}=[\dots x_j\ x_i]$, а k_i – ее значность, т.е. $\mathbf{K}=[\dots k_j\ k_i]$;

2) вычислим матрицу операции $\otimes$ следующим образом:

(11) $$\otimes=[p_{st}\mid p_{st}=f_q,\ q=s+tK_i,\ s=\overline{0,K_i-1},\ t=\overline{0,k_i-1}]$$

где f_q – q-ый элемент вектора $\mathbf{F}$, $K_i=m/k_i$, m – длина вектора $\mathbf{F}$;

3) найдем представление $[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']$ функции f':

$$\mathbf{F}'=[f_t'\mid f_t'=t;t=\overline{0,K_i-1}];\quad \mathbf{K}'=[\dots,k_j];\quad \mathbf{X}'=[\dots,x_j];$$

4) возвращаем результирующую формулу $[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']\otimes x_i$. ♦

Теорема 3. Вектор значений $\mathbf{G}$ формулы (10), синтезируемой с помощью алгоритма 2, равен вектору исходной функции $\mathbf{F}$.

Пример 4. Применим алгоритм 2 к представлению (9):

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}' \\ \left[0\ \ 1\ \ \underline{2}\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\right] \\ \mathbf{X}'=[x_0x_1x_2],\ \mathbf{K}'=[222] \end{array} \quad \begin{array}{c} x_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \underline{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \otimes \end{array},$$

или $f=f'\otimes x_3$, где функция f' задана вектором $\mathbf{F}'$. Проверкой убеждаемся, что вычисление вектора функции по найденной формуле дает исходный вектор $\mathbf{F}$. Например, при значениях переменных $\mathbf{X}$, равных $\boldsymbol{\lambda}=[0102]$, имеем $\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda})=f_q=2$ (подчеркнуто), где q – порядковый номер элемента $\mathbf{F}$, найденный с помощью (7),

$$q=x_0\cdot(1)+x_1\cdot(k_0)+x_2\cdot(k_0k_1)+x_3\cdot(k_0k_1k_2)=\lambda_0\cdot1+\lambda_1\cdot2+\lambda_2\cdot4+\lambda_3\cdot8=18.$$

В свою очередь при том же векторе $\boldsymbol{\lambda}$ находим значения 2 (подчеркнуто) функции f' по ее представлению $[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']$ при $\boldsymbol{\lambda}'=[010]$ и значение операции $\otimes$ при $x_3=2$, также равное 2 (подчеркнуто). ♦

2.4. Редукция формул

В общем случае функция f', найденная с помощью алгоритма 2, имеет большую значность, чем значность аналитической конструкции k.

Определение 6. Редукцией формулы вида (10) называется такое ее преобразование, при котором вектор значений редуцированной формулы отстоит на наименьшее расстояние от вектора значений исходной формулы, а значность функции f' не превосходит некоторого числа k – значности аналитической конструкции. Редукция будет точной, если итоговая формула эквивалентна исходной, в противном случае – неточной.

Алгоритм 3. Редукция значности k формулы вида (10), заданной функцией f' с представлением $[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']$ и операцией $\otimes$:

1) находим C – множество классов эквивалентности строк матрицы $\otimes$, $C=\{C(\mathbf{r}_0),C(\mathbf{r}_1),\dots,C(\mathbf{r}_{s-1})\}$, где $\mathbf{r}_j$ ($j=\overline{0,s-1}$) – образцовые строки, разбивающие множество строк матрицы $\circ_i$ на взаимно непересекающиеся подмножества $C(\mathbf{r}_j)$;

---

[2] Далее вместо формул вида $x_i\otimes f[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']$ будем использовать формулы вида $f[\mathbf{F}',\mathbf{K}',\mathbf{X}']\otimes x_i$, которые становятся эквивалентными после транспонирования матрицы операции $\otimes$.

2) создаем из C вектор классов эквивалентности с номерами строк $\mathbf{C}$, для этого:

– преобразуем классы $C(\mathbf{r}_j)$ во множества C_j ($j = \overline{0, s-1}$), состоящие из номеров эквивалентных строк;

– выполняем сортировку множеств C_j в порядке не возрастания количества принадлежащих им элементов, результате чего имеем вектор $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = [C_0, C_1, \ldots, C_{s-1}]$;

3) редуцируем операцию $\otimes$, т.е. преобразуем ее матрицу к виду, содержащему по одной строке из первых k классов $\mathbf{C}$, и модифицируем вектор $\mathbf{F}'$:

– t-ая строка матрицы $\otimes$ является строкой $\mathbf{r}_t$ из класса эквивалентности C_t ($t = \overline{0, k-1}$);

– каждый элемент $c < k$ вектора $\mathbf{F}'$ заменяем номером класса эквивалентности t таким, что $c \in C_t$;

– каждый элемент $c \geq k$ вектора $\mathbf{F}'$, классы эквивалентности C_j ($j = \overline{k, s-1}$) которых исключены из рассмотрения, заменяем множеством номеров $\{t \mid t < k\}$ классов эквивалентности C_t ($t = \overline{0, k-1}$), строки которых $\mathbf{r}_t$ отстоят на наименьшее расстояние от строк $\mathbf{r}_j$ с номерами исключенных классов C_j таких, что $c \in C_j$. ♦

Пример 5. Выполним с помощью алгоритма 3 редукцию формулы из примера 4. Пусть значность редукции k – сколь угодно большое число. Находим, что количество классов эквивалентности строк матрицы операции $\otimes$ равно 7 при общем их числе, равном 8:

$$C_0 = \{0\},\ \ C_1 = \{1\},\ \ C_2 = \{2\},\ \ C_3 = \{3\},\ \ C_4 = \{4,6\},\ \ C_5 = \{5\},\ \ C_6 = \{7\}.$$

Сортировка классов порождает вектор $\mathbf{C} = [C_4^0, C_0^1, C_1^2, C_2^3, C_3^4, C_5^5, C_6^6]$, где верхний индекс использован для обозначения порядка классов. Так как число k не ограничено, то используем все элементы $\mathbf{C}$. После следующей замены элементов матрицы $\otimes$: {4, 6}→0; 0→1; 1→2; 2→3; 3→4; 5→5; 7→6, получим:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}' \\ [1\ \ 2\ \ \underline{3}\ \ 4\ \ 0\ \ 5\ \ 0\ \ 6] \\ \mathbf{X}' = [x_0 x_1 x_2],\ \mathbf{K}' = [222] \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & x_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \otimes \end{array} . \ ♦$$

Если в процессе редукции число строк в матрице операции меньше или равно значности редукции k, то редукция будет точной, в противном случае – неточной. В предыдущем примере редукция операций оказалась точной. Рассмотрим теперь пример неточной редукции.

Пример 6. Выполним редукцию функции из примера 5 при $k = 3$. После соответствующего преобразования операции $\otimes$ получаем формулу:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}' \\ [1\,2\,\{1\}\,\{12\}\,0\,\{1\}\,0\,\{1\}] \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & x_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \otimes \end{array},$$

где в фигурных скобках заданы значения функции, минимизирующие расстояние между вектором исходной и редуцированной функции. После выбора одного из альтернативных значений элементов вектора $\mathbf{F}'$, получаем:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & x_3 & \end{array} \\
\mathbf{F}' & \\
[12110101] & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
 & \begin{array}{ccc} & \otimes & \end{array}
\end{array}
$$

Вычисление этой формулы при всех возможных векторах значений переменных в порядке, задаваемом (7), дает вектора значений $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G} = [010020202022020220220202],$$

который уже не равен вектору исходной функции $\mathbf{F}$. ♦

2.5. Перестановка переменных

Количество классов эквивалентности строк операции $\otimes$, которая строится с помощью алгоритма 3, зависит от последней переменной в исходном представлении $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$. По этой причине перед редукцией будем искать такое представление $[\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{X}}]$, которое эквивалентно исходному, но минимизирует число классов эквивалентности строк матрицы операции $\otimes$.

Алгоритм 4. Перестановка переменных в представлении $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$:

1) пусть задана перестановка переменных $\mathbf{S}$,

$$\mathbf{S} = [s_i \mid s_i \in \mathbf{N}^n;\, s_i \neq s_j \text{ при } i \neq j;\, i = \overline{0, n-1}];$$

2) применим перестановку $\mathbf{S}$ к вектору $\mathbf{K}$ ($\mathbf{X}$), в результате чего получим вектор $\tilde{\mathbf{K}}$ ($\tilde{\mathbf{X}}$);

3) выполним для каждого элемента f_q вектора значений $\mathbf{F} = [f_q \mid q = \overline{0, m-1}]$ следующие действия:

– найдем для q соответствующий ему вектор значений переменных $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_i \mid i = \overline{0, n-1}]$, для чего воспользуемся рекуррентным правилом (8) при векторе значностей переменных, равном $\mathbf{K}$;

– применим перестановку $\mathbf{S}$ к вектору $\boldsymbol{\lambda}$ и получим вектор $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$;

– вычислим для $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ новое значение индекса $\tilde{q}$, воспользовавшись формулой (7) при векторе значностей переменных, равном $\tilde{\mathbf{K}}$;

– запишем элемент f_q в позицию $\tilde{q}$ выходного вектора $\tilde{\mathbf{F}}$;

4) завершаем алгоритм с новым представлением $[\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{X}}]$. ♦

Теорема 4. Представление $[\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{X}}]$, полученное с помощью алгоритма 4 при произвольной перестановке переменных в представлении $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$, эквивалентно $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$.

Пример 7. Для функции из примера *4* найдем ее представление после циклического сдвига вправо вектора переменных, т.е. при $\mathbf{S} = [1230]$. Применение алгоритма 4 к исходному представлению $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$, где

$$\mathbf{F} = [011120202022010020210202]; \quad \mathbf{K} = [2223]; \quad \mathbf{X} = [x_0 x_1 x_2 x_3],$$

дает новое представление функции $[\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{X}}]$, где

$$\tilde{\mathbf{F}} = [022100122121200012200002]; \quad \tilde{\mathbf{K}} = [3222]; \quad \tilde{\mathbf{X}} = [x_3 x_0 x_1 x_2]. \ ♦$$

Алгоритм 5. Поиск наиболее близкой формулы значности k и вида $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_i$ для функции f с представлением $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$:

1) найдем с помощью алгоритма 2 исходную формулу g для функции f, $g = [\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_t$, где x_t – последняя переменная в векторе $\mathbf{X}$;

2) выполняем с помощью алгоритма 3 редукцию формулы g при значности k;

3) подсчитываем и запоминаем $d(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ – расстояние между вектором $\mathbf{F}$ и вектором значений $\mathbf{G}$ формулы g;

4) если в последней позиции вектора $\mathbf{X}$ побывали все переменные, то переходим к шагу 5), иначе вычисляем с помощью алгоритма 4 новое представление $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$ при циклическом сдвиге переменных вправо и повторяем вычисления, начиная с шага 1);

5) выбираем перестановку переменных с наименьшим значением $d(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ и завершаем алгоритм с формулой $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_i$, соответствующей этой перестановке. ♦

Теорема 5. Пусть задана формула $[\mathbf{F}', \mathbf{K}', \mathbf{X}'] \otimes x_i$, полученная из представления $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$ с помощью алгоритма 2. Тогда количество классов эквивалентности строк операции $\otimes$ не зависит от перестановок переменных в $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$, кроме тех, которые затрагивают переменную x_i.

Пример 8. Найдем точную редуцированную формулу для функции из примера 7. Для этого применим алгоритм 5 к исходному представлению функции, а промежуточные результаты запишем в таблицу 1.

Таблица 1. Промежуточные результаты алгоритма 5

$\mathbf{X}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{G}$	$d(\mathbf{F}, \mathbf{G})$
$[x_0\ x_1\ x_2\ x_3]$	$[011120202022010020210202]$	$[0\underline{2}112020\underline{1}022010\underline{1}20\underline{1}10202]$	4
$[x_3\ x_0\ x_1\ x_2]$	$[022100122121200012200002]$	$[022\underline{2}00122\underline{2}212000\underline{2}2200002]$	3
$[x_2\ x_3\ x_0\ x_1]$	$[022020100102122020102012]$	$[022020\underline{0}0\underline{2}\underline{0}02122020102012]$	3
$[x_1\ x_2\ x_3\ x_0]$	$[012222002200110002100122]$	$[0\underline{0}22220\underline{2}22001100\underline{0}0100\underline{0}22]$	4

Восстановив вторую формулу для результата с расстоянием 3, имеем:

$$\underset{\mathbf{X}' = [x_2 x_3 x_0]}{\overset{\mathbf{F}'}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \{2\} & 1 & \{012\} & \{1\} & 2 & 0 \end{bmatrix}}} \underset{\otimes}{\overset{x_1}{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \ \blacklozenge$$

2.6. Вычисление остатка

Если на шаге 4 алгоритма 1 окажется, что получена формула g, которая не эквивалентна идентифицируемой функции f, т.е. вектор значений $\mathbf{G}$ формулы $g = f' \otimes x_i$ не равен вектору значений $\mathbf{F}$ функции f, то выполним шаг 5 и найдем бинарную операцию $\oplus$ и остаточный вектор $\mathbf{F}''$ такие, что $\mathbf{G} \oplus \mathbf{F}'' = \mathbf{F}$.

Алгоритм 6. Построение операции $\oplus$ и остаточного вектора $\mathbf{F}''$ по векторам $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$:

1) находим количества вхождений e_{st} упорядоченных множеств $[s, t]$ $(s, t = \overline{0, k-1})$ во множество $\{[f_i, g_i] \mid i = \overline{0, m-1}\}$, порожденное векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, и строим матрицу $\oplus = [e_{st} \mid s, t = \overline{0, k-1}]$;

2) каждую строку $\mathbf{r}_s = [e_{st} \mid t = \overline{0, k-1}]$ матрицы $\oplus$ заменяем перестановкой номеров ее столбцов, переводящую элементы этой строки в монотонно невозрастающую последовательность с отношением порядка, заданным на множестве $\mathbf{N}^k$, в результате чего получаем матрицу искомой операции $\oplus$;

3) формируем m уравнений вида $g_i \oplus f_i'' = f_i$ $(i = \overline{0, m-1})$ и после их решения относительно f_i'' находим элементы остаточного вектора $\mathbf{F}''$, $\mathbf{F}'' = [f_0'' f_1'' \ldots f_{m-1}'']$. $\blacklozenge$

Теорема 6. Пусть заданы два вектора $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ с длиной m и значностью k. Тогда для группоида $[\mathbf{N}_k, \oplus]$ и остаточного вектора $\mathbf{F}''$, получаемых по алгоритму 6, справедливы следующие высказывания:

а) для любых элементов a и b группоида $[\mathbf{N}_k, \oplus]$ существует единственный принадлежащий ему такой элемент c, что $a \oplus c = b$;

б) вектор $[e_s \mid s = \overline{0, k-1}]$, составленный из количеств вхождений $e_s \in \mathbf{N}^{m+1}$ элементов $s \in \mathbf{N}^k$ в остаточный вектор $\mathbf{F}''$, является монотонно невозрастающим, т.е. $e_t \geq e_s$ для всех $t \leq s$.

Пример 9. Найдем операцию $\oplus$ и остаточный вектор $\mathbf{F}''$ для неточно редуцированной формулы из примера 8. В качестве исходных данных для процедуры 6 имеем:

$$\mathbf{F} = [022020100102122020102012];$$

$$\mathbf{G} = [022020\underline{0}0\underline{2}\underline{0}02122020102012].$$

Подсчитаем число вхождений каждой пары элементов, встречающихся в одинаковых позициях векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, результаты подсчета представим в виде матрицы $\tilde{\oplus}$, а после замены строк этой матрицы на перестановки ее элементов, переводящие исходные строки в монотонно невозрастающие последовательности, получим искомую операцию $\oplus$:

$$\tilde{\oplus}=\begin{bmatrix}9&2&0\\0&3&0\\1&0&9\end{bmatrix};\quad \oplus=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}.$$

Из матрицы $\tilde{\oplus}$ видно, что пара $[i, j]$ со значениями [0, 0] повторяется 9 раз, [0, 1] – 2 раза, [0, 2] – 0 раз (первая строка $\tilde{\oplus}$), и так далее, а со значением [2, 2] – 9 раз (последняя строка $\tilde{\oplus}$). Заметим также, что каждая строка матрицы $\oplus$ не содержит двух одинаковых элементов. Следовательно, уравнения вида $a\oplus c=b$ имеют единственное решение относительно c.

Запишем теперь 24 уравнения для вычисления элементов остаточного вектора $\mathbf{F}''$:

$$0\oplus f_0''=0,\; 2\oplus f_1''=2,\; 2\oplus f_2''=2,\; 0\oplus f_3''=0,\; 2\oplus f_4''=2,\; 0\oplus f_5''=0,$$

$$1\oplus f_6''=0,\; 0\oplus f_7''=0,\; 0\oplus f_8''=2,\; 1\oplus f_9''=0,\; 0\oplus f_{10}''=0,\; 2\oplus f_{11}''=2,$$

$$1\oplus f_{12}''=1,\; 2\oplus f_{13}''=2,\; 2\oplus f_{14}''=2,\; 0\oplus f_{15}''=0,\; 2\oplus f_{16}''=2,\; 0\oplus f_{17}''=0,$$

$$1\oplus f_{18}''=1,\; 0\oplus f_{19}''=0,\; 2\oplus f_{20}''=2,\; 2\oplus f_{21}''=2,\; 1\oplus f_{22}''=1,\; 2\oplus f_{22}''=2.$$

В результате решения этих уравнений получаем элементы вектора $\mathbf{F}''$,

$$\mathbf{F}''=[000000102100000000000000].$$

Из анализа вектора $\mathbf{F}''$ следует, что элемент 0 встречается 21 раз, элемент 1 – 2 раза, а элемент 2 – 1 раз. т.е. вектор числа вхождений элементов $[21, 2, 1]$ является монотонно невозрастающим. ♦

Таким образом, при вычислении остатка часто встречающиеся элементы остаточного вектора $\mathbf{F}''$ кодируются меньшим числом, а редко встречающиеся – большим. Если элемент не встретился ни разу, то он будет закодирован наибольшим числом, что равносильно снижение значности функции, выраженной вектором $\mathbf{F}''$.

2.7. Пример аналитической идентификации

Пусть требуется идентифицировать дискретное устройство, заданное исходным представлением $[\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}]$:

$$\mathbf{F}=[0111202020\,22010020210202];\quad \mathbf{K}=[2223];\quad \mathbf{X}=[x_0x_1x_2x_3].$$

Выберем значность аналитической конструкции искомых формул, равную трем, т.е. опишем устройство в двоичной и троичной логике. Применив к представлению функции алгоритм 1, имеем формулу

$$((x_1\otimes_0(x_2\otimes_1(x_0\otimes_2 x_3)))\oplus(x_1\otimes_4(x_0\otimes_5(x_3\otimes_6 x_2)))),$$

которую можно асимптотически минимальной реализовать схемой из найденных элементов-операций

$$\otimes_0=\begin{bmatrix}2&0&0\\2&0&1\end{bmatrix},\quad \otimes_1=\begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \otimes_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&1\end{bmatrix},$$

$$\otimes_4=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \otimes_5=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \otimes_6=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix},\quad \oplus=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\2&0\end{bmatrix}.$$

3. Оценка сходимости и сложности

Рассмотрим аналитическую конструкцию (4) и найдем количество применений правила $\Psi \to ((\mathrm{X}\ \Theta\ \Psi)\,\Theta\ \Psi)$ при синтезе. Применив t раз правило $\Psi \to ((\mathrm{X} \otimes \Psi) \oplus \Psi)$ и один раз правило $\Psi \to (\mathrm{X} \otimes \Psi)$ к последним вхождениям Ψ, получим

(12) $$\Psi \to ((\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1) \oplus_1 ((\mathrm{X}_2 \otimes_2 \Psi_2) \oplus_2 (\ldots \oplus_t (\mathrm{X}_{t+1} \otimes_{t+1} \Psi_{t+1})\ldots))).$$

Для простоты будем предполагать, что аналитическая конструкция, функция и ее переменные имеют одинаковую значность, равную k. Тогда длина вектора функции, выражаемого формулой Ψ, равна k^n, а формами Ψ_i ($i = \overline{1, t+1}$) – k^{n-1}. Подсчитаем число функций N_t от n переменных, выражаемых формулой (12) при различных t.

При $t = 1$ операция $\otimes_1$ состоит из k строк длины k, а матрица функции Ψ – из k^{n-1} строк длины k. Тогда количество функций, выражаемых формулами вида ($\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1$), равно количеству вариантов составления матрицы Ψ из k строк операции $\otimes_1$, или $k^{k^{n-1}} - N_0$, где $N_0 = k^k$ – начальное условие, или число функций, выражаемых более простыми формулами вида Δ, X и $\Xi\ \mathrm{X}$.

При $t = 2$ операции $\otimes_1$ и $\otimes_2$ совместно с операцией $\oplus_1$ порождают k^2 различных строк, из которых можно составлять матрицу функции Ψ. Тогда количество функций, выражаемых формулами вида $((\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1) \oplus_1 (\mathrm{X}_2 \otimes_2 \Psi_2))$, равно $(k^2)^{k^{n-1}}$, за вычетом функций, выражаемых формулой ($\mathrm{X}_1 \otimes_1 \Psi_1$), $N_2 = k^{2k^{n-1}} - N_1$.

Продолжая таким образом, при любом $t > 1$ имеем

$$N_p = (k^p)^{k^{n-1}} - N_{p-1} = k^{pk^{n-1}} - k^{(p-1)k^{n-1}}.$$

Следует заметить, что максимально возможное значение числа шагов декомпозиции t равно k. В этом случае формулой вида (12) выражаются все нетривиальные функции,

$$\sum_{t=1}^{k} N_t = k^{k^n} - N_0,$$

а среднее значение t близко k,

(13) $$\bar{t} = \frac{1}{k^{k^n} - N_0} \sum_{t=1}^{k} t N_t \approx k\left(1 - \frac{1}{k^{1+k^{n-1}}}\right),$$

Однако реальное значение $\bar{t}$ меньше найденного в (13), так как при синтезе формул (Алгоритм 1) используется минимизация, осуществляемая путем циклического сдвига переменных (Алгоритм 5), и вычисление наилучшей операции $\oplus$ (Алгоритм 6). По этой причине для оценки среднего числа шагов декомпозиции $\bar{t}$ будем использовать эмпирическую формулу

(14) $$\bar{t} \cong k\left(1 - \frac{1}{n-1}\right),$$

которая хорошо согласуется с результатами вычислительного эксперимента.

Теперь осталось оценить среднюю длину формул L_n. Из структуры формулы (12) и выражения (14) следует рекуррентное уравнение для L_n,

(15) $$L_n = \frac{n-1}{n} k\left(L_{n-1} + 2\right) - 1.$$

Из (15) при очевидном начальном условии $L_2 = 1$ непосредственно выводится выражение для средней длины формул L_n,

(16) $$L_n = \frac{6k^2 - 9k + 4}{k^2(k-1)^2} \frac{k^n}{n} - \frac{k^2}{(k-1)^2} \frac{1}{n} - \frac{k}{(k-1)} \frac{n-1}{n} - 1.$$

В частности, из (16) может быть получена асимптотическая сложность формул булевых функций $L \sim 2{,}5 \cdot 2^n / n$, которая согласуется с другими известными оценками [3]. Уточненная оценка сложности аналитического синтеза приведена в работе [4].

Заключение

Основные особенности рассмотренной методики аналитической идентификации дискретных устройств заключаются в следующем:

– в рамках описанного подхода не требуется использование априорных данных и предположений о структуре и функционировании объекта идентификации, а закономерности, необходимые для построения модели, вычисляются в процессе самого моделирования;

– разработана прикладная методика синтеза дискретных моделей, подкрепленная простыми и эффективными алгоритмами, имеющая наилучшие асимптотические оценки;

– синтезируемые формулы являются наиболее приспособленными для реализации на вычислительных средствах дискретного действия, так как, в конечном итоге, состоят из последовательности дискретных операций над дискретными переменными.

Следует заметить, что описанный подход применим не только для идентификации дискретный устройств без памяти. Его объединение с конечно-автоматным формализмом позволяет выполнять идентификацию устройств, функционирующих во времени и, тем самым, изменяющим свое состояние. В этом случае процесс идентификации заключается в синтезе функции переходов, описывающей изменение текущего состояния объекта, и функций выходов, зависящих от текущего состояния и поставляющих выходные параметры модели.

В рамках конечно-автоматного формализма задача идентификации заключается в определении множества состояний автомата и таблиц для функций переходов и выходов. Предполагается, что входной и выходной алфавит автомата задан. В работе [5] доказано, что поведение автомата с q состояниями восстанавливается посредством кратного эксперимента длины $2q-1$. Другими словами, для полной и надежной идентификации конечного автомата необходимо подать на его вход все возможные входные последовательности длиной $2q-1$. При количестве знаков во входном алфавите, равном p, таких последовательностей ровно p^{2q-1}.

Однако, если число состояний автомата неизвестно, то его идентификация возможна лишь в пределе – на счетном множестве входных строк. Тем не менее, если найден автомат с q' состояниями, не опровергаемый последующими испытаниями длиной, большей чем $2q'-1$, то с большой долей уверенности можно считать, что автомат идентифицирован.

Часто задачи автоматной идентификации имеют ограниченную сложность и, на практике, удается избежать длительных экспериментов. Так в работе [6] показано, что для почти всех автоматов степень восстановления автомата по его поведению имеет порядок $\log q$, что значительно меньше величины $2q-1$. В свою очередь доля автоматов, для которых не выполняется приведенная оценка, стремится к нулю с ростом q.

Литература

1. *Шалыто, А.А.* Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов. – СПб.: Наука, 2000.
2. *Хобби, Д., Маккензи, Р.* Строение конечных алгебр. – М.: Мир, 1993.
3. *Кириченко, К.Д.* Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций // Дискретная математика. – 2005. – Т. 17, вып. 3. – С. 80-88.
4. *Выхованец, В.С.* Алгебраическая декомпозиция дискретных функций // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 3. – С. 20-56.
5. *Мур Э.Ф.* Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 179-210.
6. *Трахтенброт Б.А., Бардзинь Я.М.* Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970.