Спектральная идентификация дискретных систем

В.С. Выхованец

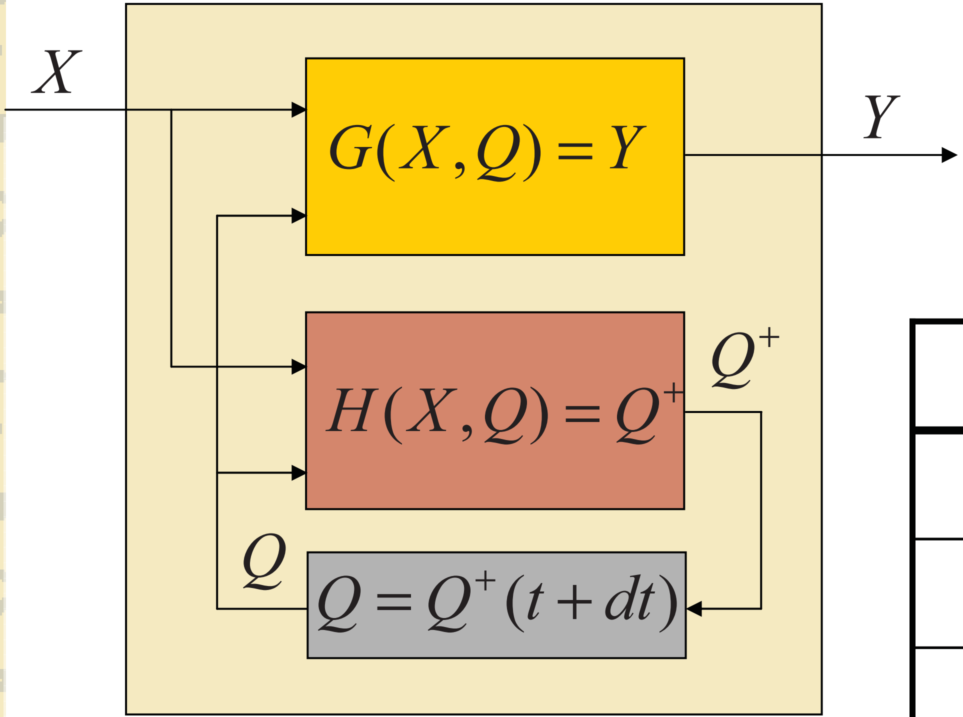
Институт проблем управления

http://valery.vykhovanets.ru

План доклада

- Постановка задачи
- Дискретные функции и операции
- Алгебраический синтез
- Спектральный синтез
- Аналитический синтез
- Оптимальный синтез
- Сложность формул
- Выводы

Дискретная идентификация



X_1	X_2	$F(X_1, X_2)$
0	0	f_0
1	0	f_1
…	…	…
k_1-1	k_2-1	$f_{m\text{-}1}$

Формула для ***F***?

Дискретные функции

$$N_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

$$f(x):\ N_{k_x} \to N_{k_f}$$

$$f(x_0, x_0, \ldots, x_{n-1}):\ N_{k_0} \times N_{k_1} \times \ldots \times N_{k_{n-1}} \to N_{k_f}$$

x_0	x_1	…	x_{n-1}	$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$
0	0	…	0	f_0
1	0	…	0	f_1
…	…	…	…	…
k_0-1	k_1-1	…	k_{n-1}-1	f_{k-1}

Дискретные операции

Унарные

$$x_0 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k_0-1 \end{array} \begin{bmatrix} o_0 \\ o_1 \\ \vdots \\ o_{k_0-1} \end{bmatrix} = o_{x_0}$$

Бинарные

$$\begin{array}{cc|cccc} & & & x_1 & & \\ & & 0 & 1 & \dots & k_1-1 \\ \hline & 0 & o_{00} & o_{01} & \cdots & o_{0,k_1-1} \\ x_0 & 1 & o_{10} & o_{11} & \cdots & o_{1,k_1-1} \\ & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & k_0-1 & o_{k_0-1,0} & o_{k_0-1,1} & \cdots & o_{k_0-1,k_1-1} \end{array} = o_{x_0 x_1}$$

$$x \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \neg x$$

$$\neg 1 = 2$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & x_1 & \\ & & 0 & 1 \\ \hline x_0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 \end{array} = x_0 \oplus x_1$$

$$1 \otimes 1 = 0$$

Пример 1 (алгебраический синтез)

$?x_0 \,\&\, ?x_1 \,\&\, ?x_2 = 1$

$$\neg = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \& = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vee = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

x_0	x_1	x_2	f
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

$$f(X) = x_0 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \vee$$
$$\vee \quad x_0 \,\&\, x_1 \,\&\, \neg x_2 \vee$$
$$\vee \quad x_0 \,\&\, x_1 \,\&\, x_2$$

$$x \,\&\, y = y \,\&\, x, \quad x \vee y = y \vee x$$

$$x \,\&\, (y \,\&\, z) = x \,\&\, (y \,\&\, z)$$
$$x \vee (y \vee z) = x \vee (y \vee z)$$

$$x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$$
$$x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$$

$$x \vee \neg x = 1, \quad x \,\&\, 1 = x$$

$$f(X) = x_0 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \vee x_0 \,\&\, x_1$$

Недостатки алгебраического синтеза

- Необходимость исследования множества операций и выявления их свойств
- Отсутствие единого подхода к синтезу формульных представлений дискретных функций
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом возможных преобразований
- Ограниченное число исследованных функционально полных базисов операций

Спектральный синтез

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \times h_i$$

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(X) \times h_i$$

$$g_i(X) = g_{iX}, \quad X \in N_m, \quad m = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} g_0(X) & g_1(X) & \ldots & g_{m-1}(X) \end{array} \\ X & \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} g_{00} & g_{10} & \cdots & g_{m-1,0} \\ g_{01} & g_{11} & \cdots & g_{m-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{0,m-1} & g_{1,m-1} & \cdots & g_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{cc} i & h_i \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} h_0 \\ h_0 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} X & f(X) \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \times \mathbf{H} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{D} \times \mathbf{F} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{G}^{-1}$$

Пример 2 (спектральный синтез)

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad * = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & X & x_0 & x_1 \\ g_0 & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & = & x_0 & 1 & 1 & 0 \\ g_2 & = & x_1 & 2 & 0 & 1 \\ g_3 & = & x_0 \times x_1 & 3 & 1 & 1 \\ g_4 & = & x_0 \otimes x_1 & 4 & 0 & 2 \\ g_5 & = & x_1 * x_0 & 5 & 1 & 2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{matrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{array}
= \begin{array}{c} \begin{matrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{D}$$

Пример 2 (спектральный синтез)

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad * = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} g_0 & = & 1 \\ g_1 & = & x_0 \\ g_2 & = & x_1 \\ g_3 & = & x_0 \times x_1 \\ g_4 & = & x_0 \otimes x_1 \\ g_5 & = & x_1 * x_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|cccccc} X & x_0 & x_1 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \times \begin{array}{c|c} X & f \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{array} = \begin{array}{c|c} i & h \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{array}$$

$$f(x_0, x_1) = x_0 + x_0 \times x_1 + x_1 * x_0 \times 2$$

Недостатки спектрального синтеза

- Необходимость предварительного синтеза формул спектральных функций
- Необходимость проверки совместимости спект-ральных функций (вычисление определителей)
- Необходимость вычисления обратных функций (обращение матриц)
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом спектральных базисов

Постановка задачи

1. Аналитический синтез

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1} g_i(X) \qquad \begin{cases} \operatorname{var} g_i; \\ \min M. \end{cases}$$

2. Оптимальный синтез

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1} g_i(X')\times h_i(X'') \qquad \begin{cases} \operatorname{var} X', X''; \\ \operatorname{var} g_i, h_i; \\ \min M. \end{cases}$$

Аналитический синтез

$$f(X)=\sum_{i=0}^{m-1} g_i(X)$$

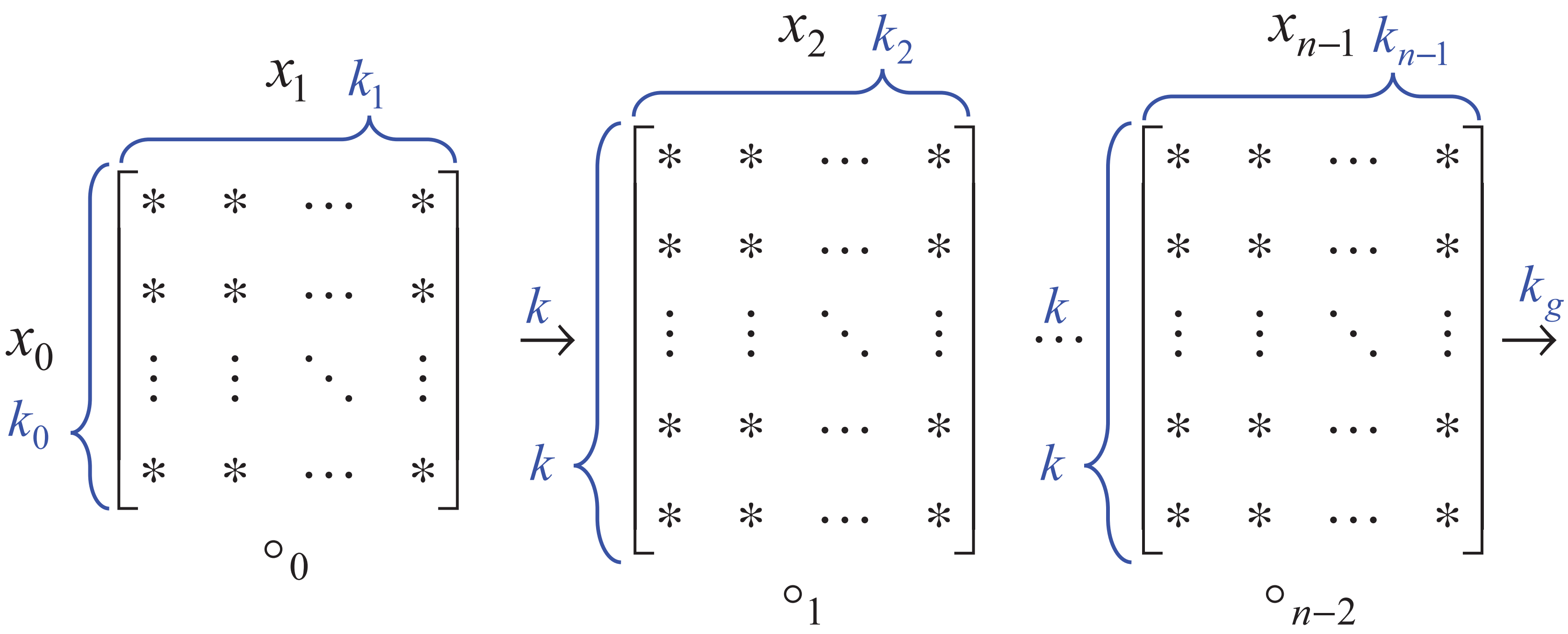
$$g(X)=x_0 \circ_0 x_1 \circ_1 x_2 \circ_2 \ldots \circ_{n-2} x_{n-1}$$

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{M-1} x_{i_0} \circ_{i\,0} x_{i_1} \circ_{i\,1} \ldots \circ_{i\,n-2} x_{i_p}$$

$$\begin{cases} \mathrm{var}\ \circ_{ij}; \\ \min M. \end{cases}$$

Аналитическая конструкция

$$g(X) = x_0 \circ_0 x_1 \circ_1 x_2 \circ_2 \ldots \circ_{n-2} x_{n-1}$$



k - значность аналитической конструкции

$$g(X) = ((\ldots((x_0 \circ_0 x_1) \circ_1 x_2) \circ_2 \ldots) \circ_{n-2} x_{n-1})$$

Пример 3 (аналитическая конструкция)

$$g(x_0, x_1, x_2) = x_1 \oplus x_0 * x_3 \otimes x_2$$

$$\begin{array}{cc} & x_0 \quad k_0 = 3 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ k_1 = 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ & \oplus \end{array} \xrightarrow{k=4} \begin{array}{c} k_3 = 4 \\ x_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ * \end{array} \xrightarrow{k=4} \begin{array}{c} k_2 = 3 \\ x_2 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \otimes \end{array} \begin{array}{c} = g(X) \\ k_g = 3 \end{array}$$

Значность аналитической конструкции $k = 4$

$$\mathbf{K} = [3234]$$

$$\mathbf{G} = [010202212012001201022010 02...]$$

Пример 4 (редукция)

$$\mathbf{K} = [323], \quad \mathbf{G} = [011101102010201020]$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & x_1 \end{array} \\ x_0 & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \circ_0 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & x_2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 1 & 7 & 13 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 10 & 16 \\ 5 & 11 & 17 \end{bmatrix} \end{array} \circ_1, \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & x_1 \end{array} \\ x_0 & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \end{array} \circ_0 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & x_2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \circ_1$$

$$C_0 = \{0,4\}$$

$$C_1 = \{1,3,5\}$$

$$C_2 = \{2\}$$

$$\downarrow$$

$$k = 3$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & x_1 \end{array} \\ x_0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ_0 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & x_2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ_1 = g(X), \quad g(X) = x_0 \circ_0 x_1 \circ_1 x_2$$

Пример 4 (остаточный вектор 1)

$$\mathbf{K} = [2223], \quad \mathbf{F} = [011120202022010020210202]$$

$$k = 3$$

$$\underset{\circ_{00}}{x_3\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} x_0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \end{array}}
\;
\underset{\circ_{01}}{\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ * & 2 \\ 1 & * \end{bmatrix} \end{array}}
\;
\underset{\circ_{02}}{\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}},
\quad
x_3 \underset{\circ_{00}}{\begin{array}{c} x_0 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}}
\;
\underset{\circ_{01}}{\begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}}
\;
\underset{\circ_{02}}{\begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}} = g_0$$

$$\mathbf{G}_0 = [022100222122200022000000]$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{G}_0 = [022100122121200012200002]$$

Пример 4 (остаточный вектор 2)

$$\mathbf{K} = [2223],\ \ \mathbf{F}_1 = [022100122121200012200002\,]$$

$$\begin{array}{cccc} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \circ_{10} & \circ_{11} & \circ_{12} \end{array} \to g_1(X)$$

$$\mathbf{G}_1 = [000000200002000020200002]$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_1 = [000000000000000000000000]$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1, \quad f(X) = g_0(X) + g_1(X)$$

$$f(X) = x_3 \circ_{00} x_0 \circ_{01} x_1 \circ_{02} x_2 \ + \ x_3 \circ_{10} x_0 \circ_{11} x_1 \circ_{12} x_2$$

Остаточная алгебра

- Образована одной операцией (сложение)
- Позволяет решать уравнения вида: $g + x = f$

$$3 + x = 1$$

$$\begin{array}{c c} & x \\ & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ g \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

f

$$x = 1$$

$$\mathbf{G}_i = [012020222002020020020200]$$

$$\mathbf{F}_i = [011120202022010020210202]$$

$$\begin{array}{c c} & f \\ & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ g \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad +_i = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{i+1} = [001200020010010000110001]$$

Сложность формул 1

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{M-1} x_{i_0} \circ_{i\,0} x_{i_1} \circ_{i\,1} \ldots \circ_{i\,n-2} x_{i_p}$$

$$M \le \frac{1}{k-\alpha} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta}$$

$$L \le Mn$$

Оптимальный синтез

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M'-1} g_i(X')\times h_i(X'')$$

$$\begin{array}{c}\\ k'-k''\left\{\begin{array}{c}\\\\\end{array}\right.\end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc:cc}
\tau & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi\\
\phi & \tau & \phi & \phi & \phi & \phi\\
\phi & \phi & \tau & \phi & \phi & \phi\\
\phi & \phi & \phi \ \mathbf{G} & \tau & \phi & \phi\\ \hdashline
* & * & * & * & \tau & \phi\\
* & * & * & * & \phi & \tau
\end{array}\right]}_{k''\ (\text{first four columns})}
\times
\left[\begin{array}{cccc}
+ & + & + & +\\
+ & + & + & +\\
+ & + & + & +\\
+ & + \ \mathbf{H} & + & +\\ \hdashline
\phi & \phi & \phi & \phi\\
\phi & \phi & \phi & \phi
\end{array}\right]
=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc}
+ & + & + & +\\
+ & + & + & +\\
+ & + & + & +\\
+ & + \ \mathbf{F} & + & +\\ \hdashline
\sim & \sim & \sim & \sim\\
\sim & \sim & \sim & \sim
\end{array}\right]}_{k''}
\left.\begin{array}{c}\\\\\\\\\\\\\end{array}\right\}k'$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n'-1} k_i' - \sum_{j=0}^{n''-1} k_j''\right)\approx \rho$$

$$\rho n=\bar{k}\log_{\tilde{k}}(0{,}5(k-\alpha)(\bar{k}n-2\beta+\rho n))$$

Сложность формул 2

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1} g_i(X')\times h_i(X'')$$

$$M \le C^2 \frac{m}{n^2} \qquad L \le C^2 \frac{m}{n}$$

$$C=\frac{1}{k-\alpha}\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i-2\beta\right)\right)^2-\rho^2}}$$

Выводы

- Изучены три метода синтеза формул: алгебраический, спектральный и аналитический
- Определены достоинства и недостатки каждого из перечисленных методов
- Показано, что наименее трудоемким является аналитический метод синтеза формул
- Оптимальный синтез сопряжен с большой трудоемкостью вычислений
- Найдены оценки максимальной сложности формул, синтезируемых аналитическим и оптимальным методом