# Ситез формул

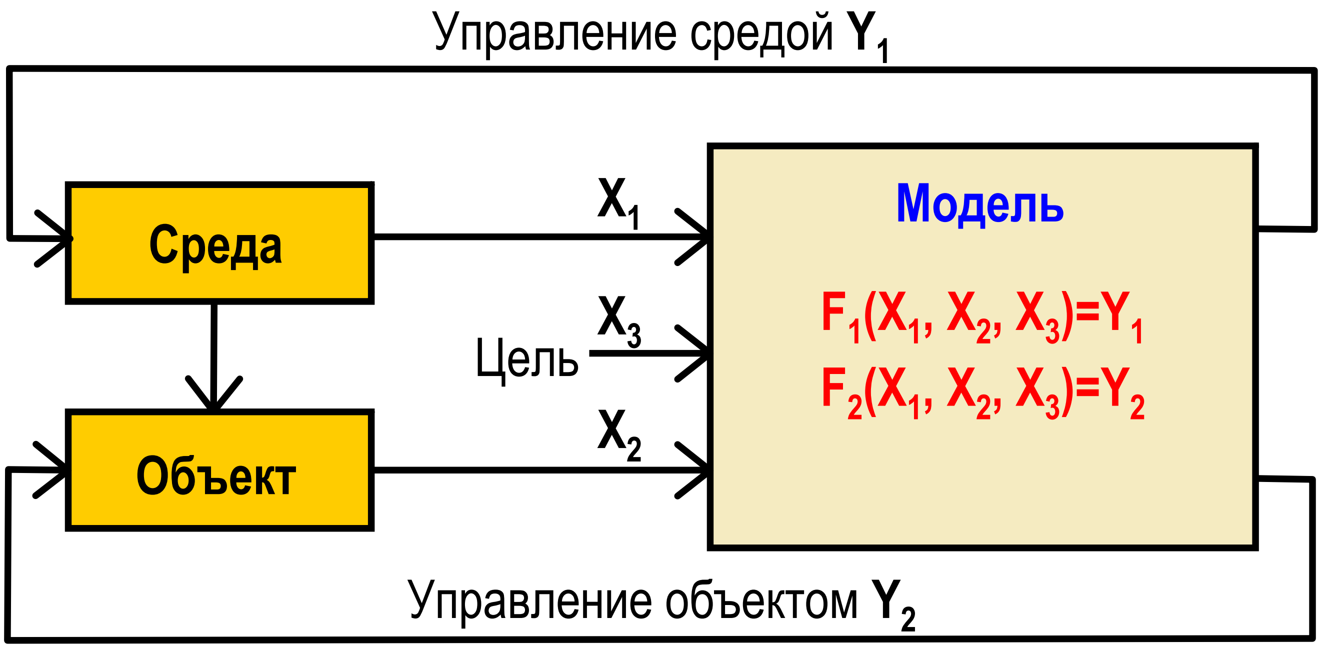
Прикладной аспект

http://valery.vykhovanets.ru

# План лекции

- Постановка задачи
- Основные определения
- Алгебраический синтез
- Спектральный метод
- Аналитический синтез
- Сложность формул
- Выводы

# Постановка задачи




$$\mathbf{X} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}: \begin{cases} f_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_0 \\ f_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{s-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_{s-1} \end{cases} \rightarrow \{y_0, y_1, \ldots, y_{s-1}\} = \mathbf{Y}$$

# Дискретные функции

$$N_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

$$f(x):\ N_{k_x} \to N_{k_f}$$

$$f(x_0, x_0, \ldots, x_{n-1}):\ N_{k_0} \times N_{k_1} \times \ldots \times N_{k_{n-1}} \to N_{k_f}$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | $f_0$ |
| 1 | $f_1$ |
| … | … |
| k-1 | $f_{k-1}$ |

| $x_0$ | $x_1$ | … | $x_{n-1}$ | $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | … | 0 | $f_0$ |
| 1 | 0 | … | 0 | $f_1$ |
| … | … | … | … | … |
| $k_0$-1 | $k_1$-1 | … | $k_{n-1}$-1 | $f_{k-1}$ |

# Пример 1. Функции

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |

$$x \in N_4, \quad N_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f(x) \in N_2, \quad N_2 = \{0, 1\}$$

$$f(2) = 1$$

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $f(x_0, x_1, x_2)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| … | … | … | … |
| 1 | 2 | 3 | 0 |

$$f(1, 1, 0) = 2$$

# Дискретные операции

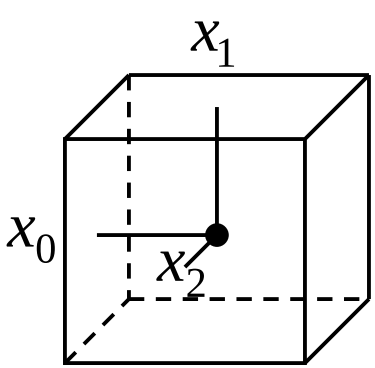
## Унарные

$$x_0 \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k_0-1 \end{array} \begin{bmatrix} o_0 \\ o_1 \\ \vdots \\ o_{k_0-1} \end{bmatrix} = o_{x_0}$$

## Бинарные

$$\begin{array}{cc} & \qquad\qquad x_1 \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & k_1-1 \end{array} \\ x_0 \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ \dots \\ k_0-1 \end{array} & \begin{bmatrix} o_{00} & o_{01} & \cdots & o_{0,k_1-1} \\ o_{10} & o_{11} & \cdots & o_{1,k_1-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{k_0-1,0} & o_{k_0-1,1} & \cdots & o_{k_0-1,k_1-1} \end{bmatrix} \end{array} = o_{x_0 x_1}$$

## Тернарные




$$= o_{x_0 x_1 x_2}$$

# Пример 2. Операции

Унарная

$$
x\;
\begin{array}{c}
0\\ 1\\ 2\\ 3
\end{array}
\begin{bmatrix}
1\\ 2\\ 3\\ 0
\end{bmatrix}
= \neg x
$$

$$\neg 1 = 2$$

Бинарная

$$
x_0\;
\begin{array}{c|c}
 & x_1 \\
 & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
= x_0 \oplus x_1
$$

$$1 \otimes 1 = 0$$

Тернарная

$$
x_0 \,?\, x_1 : x_2 = \begin{cases} x_1, & x_0 \neq 0 \\ x_2, & x_0 = 0 \end{cases}
$$

$$1?0:1=0$$

# Алгебраический синтез

$?x_0 \,\&\, ?x_1 \,\&\, ?x_2 = 1$

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$\neg = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \& = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vee = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(X) &= x_0 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \vee \\ &\vee\ x_0 \,\&\, x_1 \,\&\, \neg x_2 \vee \\ &\vee\ x_0 \,\&\, x_1 \,\&\, x_2 \end{aligned}$$

$$x \,\&\, y = y \,\&\, x, \quad x \vee y = y \vee x$$

$$x \,\&\, (y \,\&\, z) = x \,\&\, (y \,\&\, z)$$
$$x \vee (y \vee z) = x \vee (y \vee z)$$

$$x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$$
$$x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$$

$$x \vee \neg x = 1, \quad x \,\&\, 1 = x$$

$$f(X) = x_0 \,\&\, \neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \ \vee\ x_0 \,\&\, x_1$$

# Недостатки алгебраического синтеза

- Необходимость исследования множества операций и выявления их свойств
- Отсутствие единого подхода к синтезу формульных представлений дискретных функций
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом возможных преобразований
- Ограниченное число исследованных функционально полных базисов операций

# Спектральный метод

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \times h_i$$

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(X) \times h_i$$

$$g_i(X) = g_{iX}, \quad X \in N_m, \quad m = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$$

$$\begin{array}{cc} X & \begin{array}{cccc} g_0(X) & g_1(X) & \dots & g_{m-1}(X) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} g_{00} & g_{10} & \cdots & g_{m-1,0} \\ g_{01} & g_{11} & \cdots & g_{m-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{0,m-1} & g_{1,m-1} & \cdots & g_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{cc} i & h_i \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} h_0 \\ h_0 \\ \vdots \\ h_{m-1} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} X & f(X) \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \times \mathbf{H} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{D} \times \mathbf{F} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{G}^{-1}$$

# Пример 3. Спектральный метод

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \otimes = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad * = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & X & x_0 & x_1 \\ g_0 & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & = & x_0 & 1 & 1 & 0 \\ g_2 & = & x_1 & 2 & 0 & 1 \\ g_3 & = & x_0 \times x_1 & 3 & 1 & 1 \\ g_4 & = & x_0 \otimes x_1 & 4 & 0 & 2 \\ g_5 & = & x_1 * x_0 & 5 & 1 & 2 \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{array}
=
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{D}$$

# Пример 3. Спектральный метод

$$+=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}\qquad \times=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}\qquad \otimes=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}\qquad *=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcc|ccc|c}
 & & & X & x_0 & x_1 & \\
g_0 & = & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
g_1 & = & x_0 & 1 & 1 & 0 & \\
g_2 & = & x_1 & 2 & 0 & 1 & \\
g_3 & = & x_0\times x_1 & 3 & 1 & 1 & \\
g_4 & = & x_0\otimes x_1 & 4 & 0 & 2 & \\
g_5 & = & x_1 * x_0 & 5 & 1 & 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{array}\qquad
\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\2&0&1&0&0&0\\1&2&2&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}\times
\begin{array}{c|c} X & f\\ \hline 0&0\\1&1\\2&0\\3&1\\4&0\\5&2\end{array}=
\begin{array}{c|c} i & h\\ \hline 0&0\\1&1\\2&0\\3&1\\4&0\\5&2\end{array}$$

$$f(x_0,x_1)=x_0+x_0\times x_1+x_1*x_0\times 2$$

# Спектральные алгебры

## Алгебра логики

$$+ = \begin{array}{c|cccc|} & \sigma & & & \tau \\ \hline \sigma & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & * & * & * \\ & 2 & * & * & * \\ \tau & 3 & * & * & * \end{array} \qquad \times = \begin{array}{c|cccc|} & \sigma & & & \tau \\ \hline \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ \tau & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$\sigma + x = \sigma$

$x + \sigma = \sigma$

$\sigma \times x = \sigma$

$\tau \times x = x$

## Мультипликативная алгебра

$$+ = \begin{array}{c|cccc|} & \sigma & & & \tau \\ \hline \sigma & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & * & * & * \\ & 2 & * & * & * \\ \tau & 3 & * & * & * \end{array} \qquad \times = \begin{array}{c|cccc|} & \sigma & & & \tau \\ \hline \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 3 & 1 \\ & 0 & 3 & 1 & 2 \\ \tau & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$\sigma + x = \sigma$

$x + \sigma = \sigma$

Группа на $N_k \setminus \sigma$

## Аддитивная алгебра

$$+ = \begin{array}{c|cccc|} & \sigma & & & \tau \\ \hline \sigma & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 0 & 3 & 2 \\ & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \tau & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \times = \begin{array}{c|cccc|} & \sigma & & & \tau \\ \hline \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ \tau & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Абелева группа

$\sigma \times x = \sigma$

$\tau \times x = x$

## Фундаментальная алгебра

$$+ = \begin{array}{c|cccc|} & \sigma & & & \tau \\ \hline \sigma & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 0 & 3 & 2 \\ & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \tau & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \times = \begin{array}{c|cccc|} & \sigma & & & \tau \\ \hline \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 3 & 1 \\ & 0 & 3 & 1 & 2 \\ \tau & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Конечное поле или целостное кольцо

# Пример 4. Спектральные функции

**Алгебра логики**

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{G} \neq 0\,!$$

Двузначные унимодальные функции

**Мультипликативная алгебра**

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{G} \neq 0\,!$$

Многозначные унимодальные функции

**Аддитивная алгебра**

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{G} \neq 0\,?$$

Двузначные мультимодальные функции

**Фундаментальная алгебра**

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{G} \neq 0\,?$$

Многозначные мультимодальные функции

# Недостатки спектрального метода

- Необходимость предаварительного синтеза формул спектральных функций
- Необходимость проверки совместимости спект-ральных функций (вычисление определителей)
- Необходимость вычисления обратных функций (обращение матриц)
- Трудности минимизации формул, связанные с большим числом спектральных базисов

# Аналитический синтез

$$f(X)=\sum_{i=0}^{m-1} g_i(X)\times h_i$$

$$g(X)=x_0\circ_0 x_1\circ_1 x_2\circ_2\ldots\circ_{n-2} x_{n-1}$$

$$f(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})=\sum_{i=0}^{M-1} x_{i_0}\circ_{i\,0} x_{i_1}\circ_{i\,1}\ldots\circ_{i\,n-2} x_{i_p}$$

$$\begin{cases}\mathrm{var}\ \circ_{ij};\\ \min M.\end{cases}$$

# Аналитическая конструкция

$$g(X) = x_0 \circ_0 x_1 \circ_1 x_2 \circ_2 \ldots \circ_{n-2} x_{n-1}$$

$$\underset{x_0\ {\color{blue}k_0}}{} {\color{blue}\left\{\right.} \underset{\circ_0}{\overset{x_1\ {\color{blue}k_1}}{\overbrace{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}}} \xrightarrow{\color{blue}k} {\color{blue}k} {\color{blue}\left\{\right.} \underset{\circ_1}{\overset{x_2\ {\color{blue}k_2}}{\overbrace{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}}} \overset{\color{blue}k}{\cdots} {\color{blue}k} {\color{blue}\left\{\right.} \underset{\circ_{n-2}}{\overset{x_{n-1}\ {\color{blue}k_{n-1}}}{\overbrace{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}}} \xrightarrow{\color{blue}k_g}$$

$k$ - значность аналитической конструкции

$${\color{red} g(X) = ((\ldots((x_0 \circ_0 x_1) \circ_1 x_2) \circ_2 \ldots) \circ_{n-2} x_{n-1})}$$

# Пример 5. Аналитическая конструкция

$$g(x_0, x_1, x_2) = x_1 \oplus x_0 * x_3 \otimes x_2$$

$$\begin{array}{cc} & x_0 \quad k_0 = 3 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ k_1 = 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ & \oplus \end{array} \xrightarrow{k=4} \begin{array}{c} x_3 \quad k_3 = 4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ * \end{array} \xrightarrow{k=4} \begin{array}{c} x_2 \quad k_2 = 3 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \otimes \end{array} \begin{array}{c} = g(X) \\ k_g = 3 \end{array}$$

Значность аналитической конструкции $k = 4$

$$\mathbf{K} = [3234]$$

$$\mathbf{G} = [01020221201200120102201002...]$$

# Синтез спектральных функций

$$\mathbf{K}=[323],\quad \mathbf{G}=[011101102010201020]$$

$$\begin{array}{cc} & x_1 \\ x_0 & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ & \circ_0 \end{array}\ \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 1 & 7 & 13 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 9 & 15 \\ 4 & 10 & 16 \\ 5 & 11 & 17 \end{bmatrix} \\ \circ_1 \end{array},\qquad \begin{array}{cc} & x_1 \\ x_0 & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ & \circ_0 \end{array}\ \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \circ_1 \end{array}$$

$C_0=\{0,4\}$

$C_1=\{1,3,5\}$

$C_2=\{2\}$

$\downarrow$

$k=3$

$$\begin{array}{cc} & x_1 \\ x_0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ & \circ_0 \end{array}\ \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \circ_1 \end{array} = g(X),\quad g(X)=x_0\circ_0 x_1\circ_1 x_2$$

# Остаточный вектор 1

$$\mathbf{K}=[2223],\quad \mathbf{F}=[011120202022010020210202]$$

$$k=3$$

$$x_3\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\end{array}\!\!\begin{array}{c} x_0\\ \begin{bmatrix}0&3\\1&4\\2&5\end{bmatrix}\end{array}\circ_{00}\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\!\!\begin{array}{c} x_1\\ \begin{bmatrix}1&*\\0&0\\0&0\\2&2\\*&2\\1&*\end{bmatrix}\end{array}\circ_{01}\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\end{array}\!\!\begin{array}{c} x_2\\ \begin{bmatrix}2&0\\0&2\\1&0\end{bmatrix}\end{array}\circ_{02},\qquad x_3\begin{array}{c} x_0\\ \begin{bmatrix}2&1\\0&2\\0&2\end{bmatrix}\end{array}\circ_{00}\begin{array}{c} x_1\\ \begin{bmatrix}0&0\\2&2\\1&0\end{bmatrix}\end{array}\circ_{01}\begin{array}{c} x_2\\ \begin{bmatrix}2&0\\0&2\\1&0\end{bmatrix}\end{array}\circ_{02}=g_0$$

$$\mathbf{G}_0=[022100222122200022000000]$$

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{F}-\mathbf{G}_0=[022100122121200012200002]$$

# Остаточный вектор 2

$$\mathbf{K} = [2223],\ \ \mathbf{F}_1 = [022100122121200012200002\,]$$

$$\begin{array}{cccc} & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \circ_{10} & \circ_{11} & \circ_{12} \end{array} \rightarrow g_1(X)$$

$$\mathbf{G}_1 = [000000200002000020200002]$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_1 = [000000000000000000000000]$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1, \quad f(X) = g_0(X) + g_1(X)$$

$$f(X) = x_3 \circ_{00} x_0 \circ_{01} x_1 \circ_{02} x_2 \ + \ x_3 \circ_{10} x_0 \circ_{11} x_1 \circ_{12} x_2$$

# Остаточная алгебра

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{M-1} x_{i_0} \circ_{i\,0} x_{i_1} \circ_{i\,1} \cdots \circ_{i\,n-2} x_{i_p}$$

- Образована одной операцией (сложение)
- Позволяет решать уравнения вида: $g + x = f$

$$3 + x = 1 \qquad \begin{array}{cc} & x \\ & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ g \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & f \end{array} \qquad x = 1$$

# Сложность формул

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{M-1} x_{i_0} \circ_{i\,0} x_{i_1} \circ_{i\,1} \ldots \circ_{i\,n-2} x_{i_p}$$

$$M \le \frac{1}{k-1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - k}$$

$$L \le \frac{n}{k-1} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - k}$$

# Выводы

- Изучены три метода синтеза формул: алгебраический, спектральный и аналитический
- Определены достоинства и недостатки каждого из перечисленных методов
- Показано, что наименее трудоемким является аналитический метод синтеза формул
- Найдены оценки максимальной сложности формул, синтезируемых аналитическим методом