РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова

Выхованец В.С.

Синтез эффективных математических моделей дискретной обработки данных на основе алгебраической и понятийной декомпозиции предметной области

05.13.11 «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей»

05.13.15 «Вычислительные машины и системы»

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук

Цели и задачи исследования

Цель работы – разработка теории и методов синтез оптимального описания дискретной обработки данных для ее эффективной реализации аппаратурными и программно-аппаратными средствами.

Общая задача – получение формальных описаний дискретной обработки данных, оптимальных по количеству выполняемых операций.

Частные задачи:

– развитие общей теории дискретных функций на основе аппарата алгебраической декомпозиции;

– обоснование методики оптимального синтеза дискретной обработки данных и получение оценок сложности синтезируемых описаний;

– разработка методологии анализа предметной области для получения ее оптимальных декомпозиционных схем;

– создание технологии обработки данных путем использования оптимальных семантически замкнутых формальных спецификаций.

Глава 1 Дискретная обработка данных

1.1 Общая постановка задачи

Дискретная обработка данных – процесс вычисления дискретной функции по некоторому ее формальному описанию.

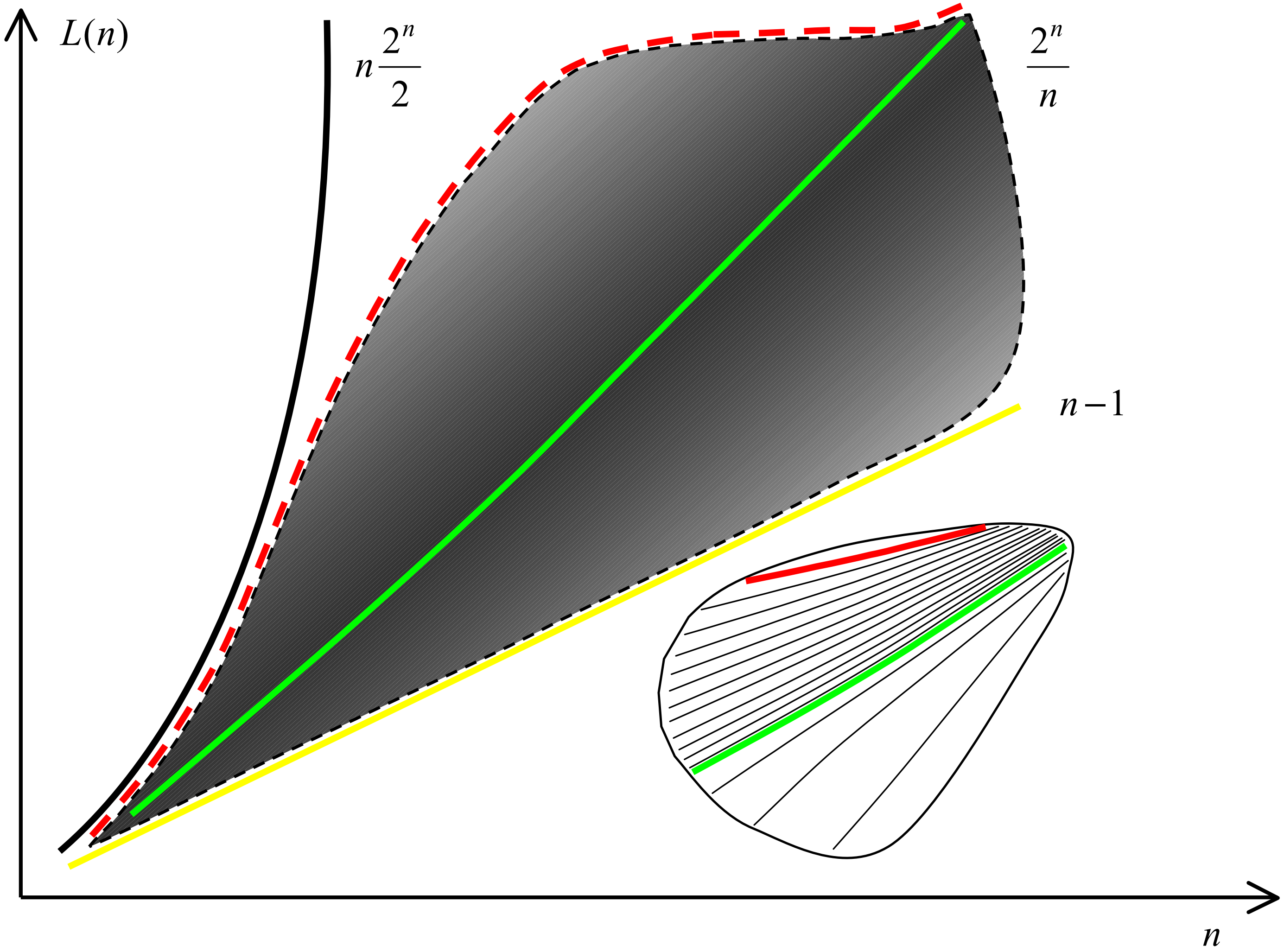
$$\mathbf{X} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} \\ \begin{cases} f_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_0 \\ f_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{s-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = y_{s-1} \end{cases} \end{array}} \longrightarrow \mathbf{Y} = \{y_0, y_1, \ldots, y_{s-1}\}$$

Основная проблема дискретной обработки – декомпозиция дискретной функции (представление функции в виде формулы).

1.2 Декомпозиции дискретных функций

Декомпозиция	Конструкция	Переменные
Пересекающаяся	$f(X)=\theta(X',a(X''))$	$X'\cap X''\neq\varnothing$ $X'\cup X''=X$
Разделительная	$f(X)=\theta(X',a(X''))$	$X'\cap X''=\varnothing$ $X'\cup X''=X$
Кратная	$f(X)=\theta(X',a_1(X''),a_2(X''),\ldots,a_m(X''))$	$X'\cap X''=\varnothing$ $X'\cup X''=X$
Промежуточная	$f(X)=\Sigma(\theta_1(X',a_1(X'')),\ \ldots,\theta_m(X',a_m(X'')))$	$X'\cap X''=\varnothing$ $X'\cup X''=X$
Алгебраическая	$f(X)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(X')\times a_i(X'')$	$X'\cup X''=X$ $X'\cap X''=\varnothing$
Спектральная	$f(X)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(X')\times a_i(X'')=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(X)\times a_i$	$X''=\varnothing$ $X'=X$

1.3 Оценки сложности



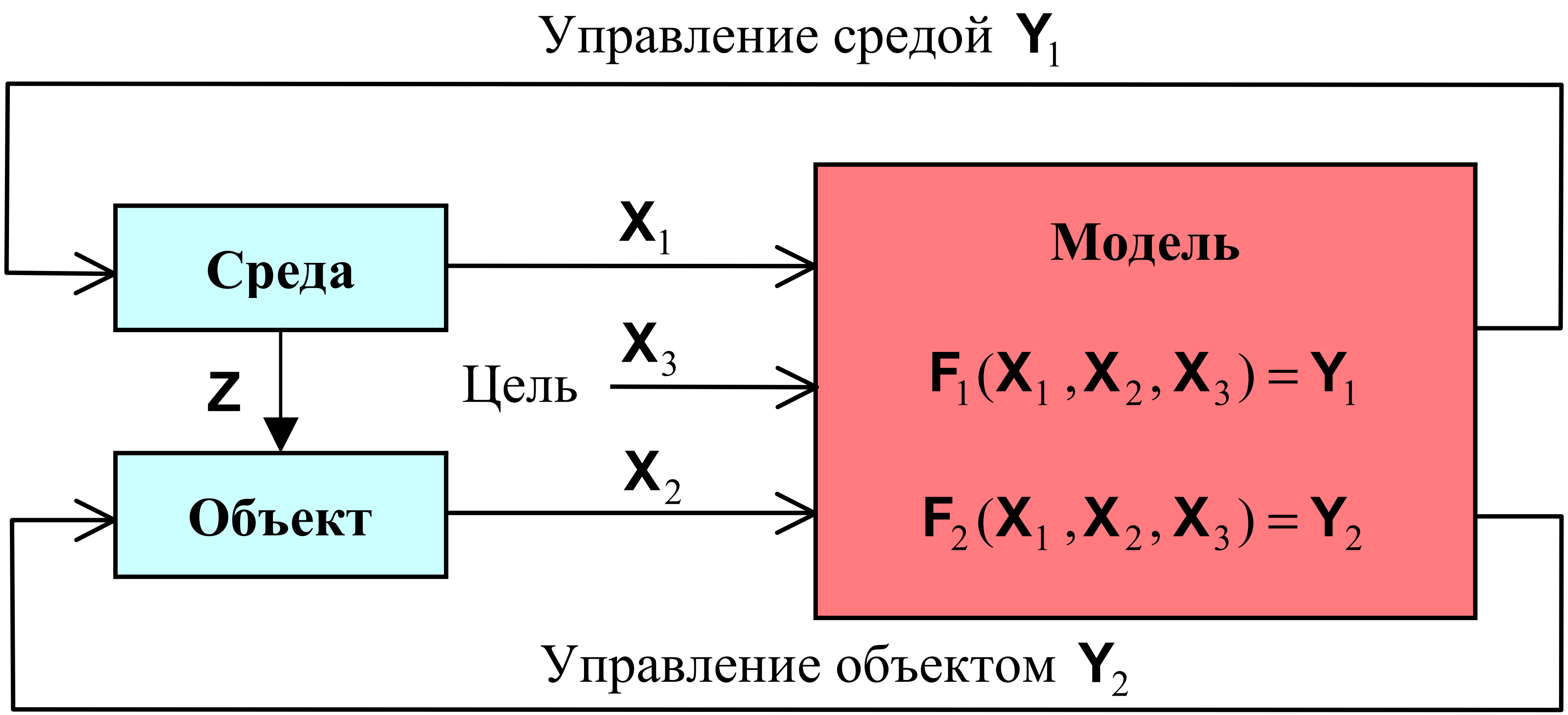
Не существует ***абсолютных верхних оценок*** сложности реализации дискретных функций при конечном числе переменных.

1.4 Цифровая обработка сигналов

Цифровая обработка сигналов	**Дискретная обработка данных**
Дискретный сигнал	Дискретная функция
Многомерный сигнал	Система дискретных функций
Вектор отсчетов сигнала	Характеристический вектор функции
Спектр сигнала	Вектор коэффициентов формы
Выбор базиса	Синтез конструкции формы
Оптимизация базиса	Минимизация формы
Сжатие сигнала	Минимизация функции
Генерация сигналов	Синтез форм
Представление сигнала спектром	Вычисление вектора коэффициентов
Восстановление сигнала по спектру	Кратные вычисления формы
Взаимное преобразование спектров	Взаимное преобразование форм
Обработка сигнала	Операции над формами

Преобразование Карунена-Лоэва – разложение функции осуществляется по собственным векторам ковариационной матрицы и получается оптимальное приближение функции в среднеквадратическом смысле.

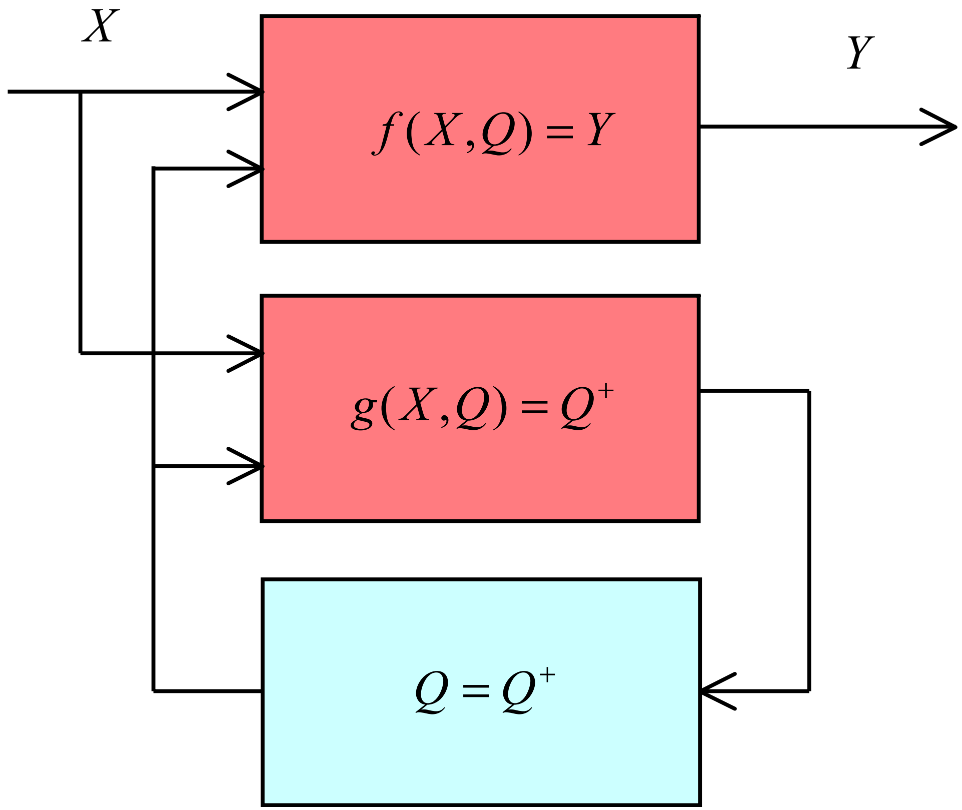
1.5 Дискретная обработка в управлении

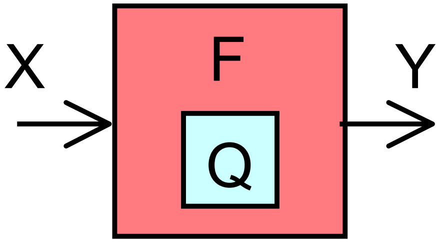


Система управления дискретного действия описывается совокупностью дискретных функций и состоянием запоминающих устройств.

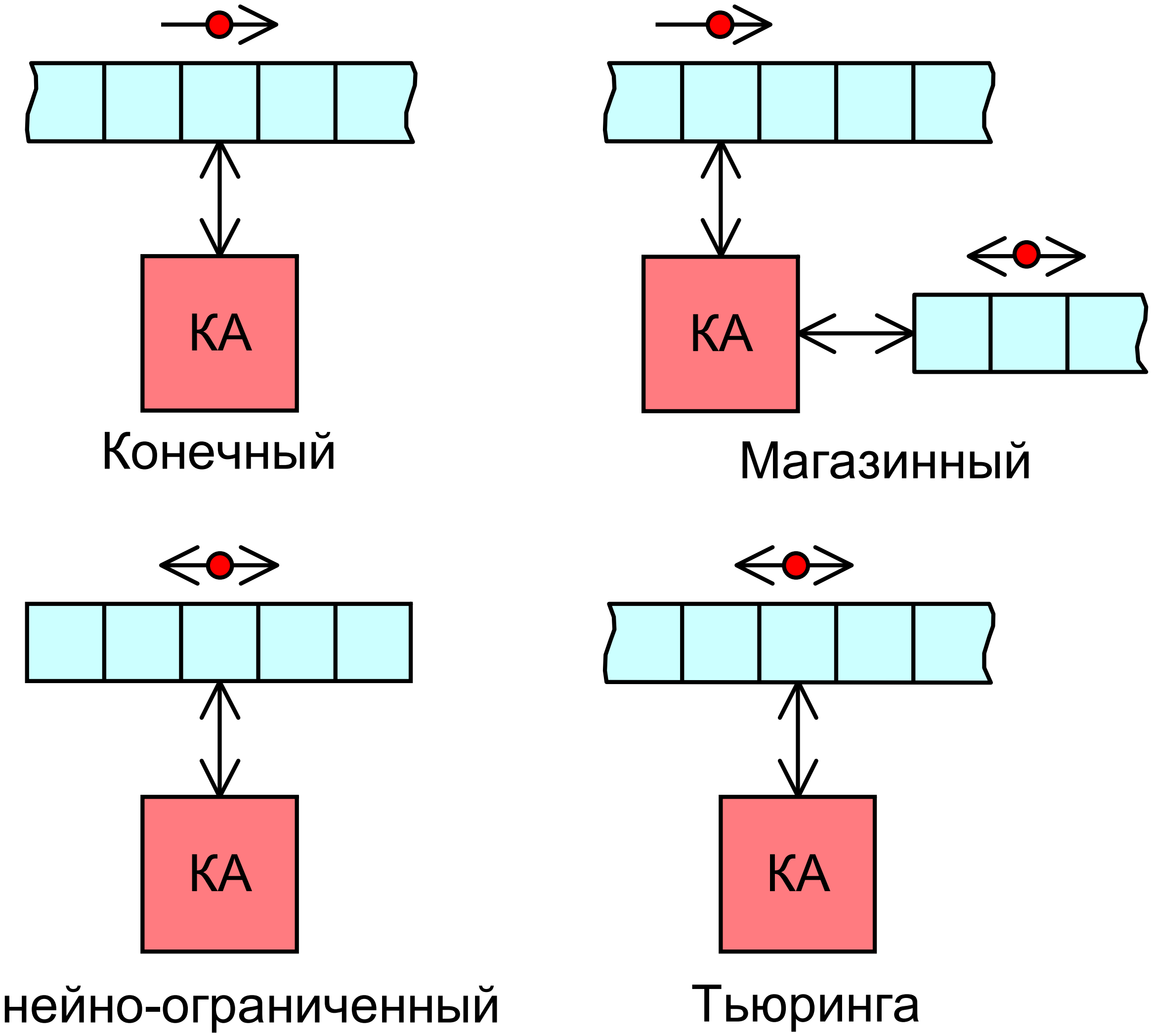
Постановка задачи дискретной обработки в управлении основывается на автоматных моделях с памятью.

1.6 Конечный автомат



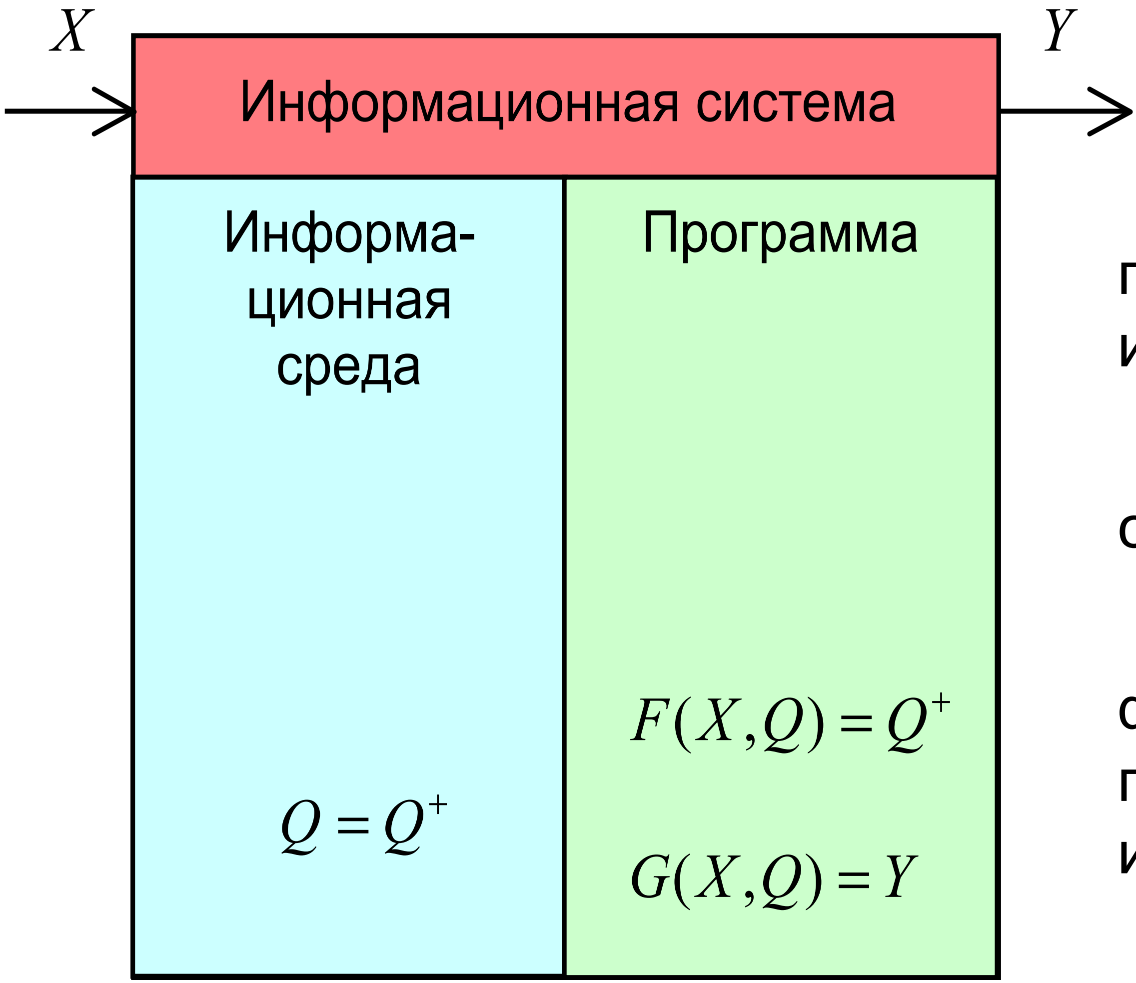


1.7 Вычислительные модели



Вычислительные модели состоят из конечного автомата и запоминающих устройств с различными дисциплинами доступа к данным.

1.8 Информационные системы



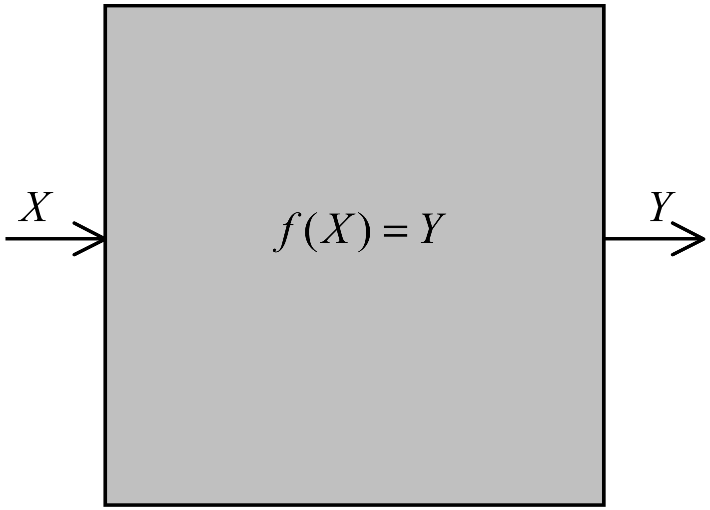
Обработка данных – процесс смены состояний информационной среды.

Информационная среда – совокупность носителей данных.

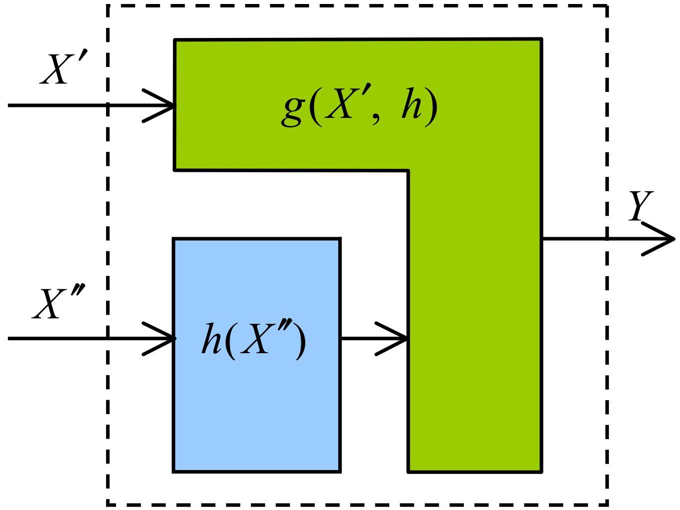
Программа – формализованное описание процесса смены состояний информационной среды.

Использование общих методик и универсальных декомпозиционных схем для решения прикладных задач большой размерности практически неосуществимо из невозможности устранения перебора большого числа вариантов решений.

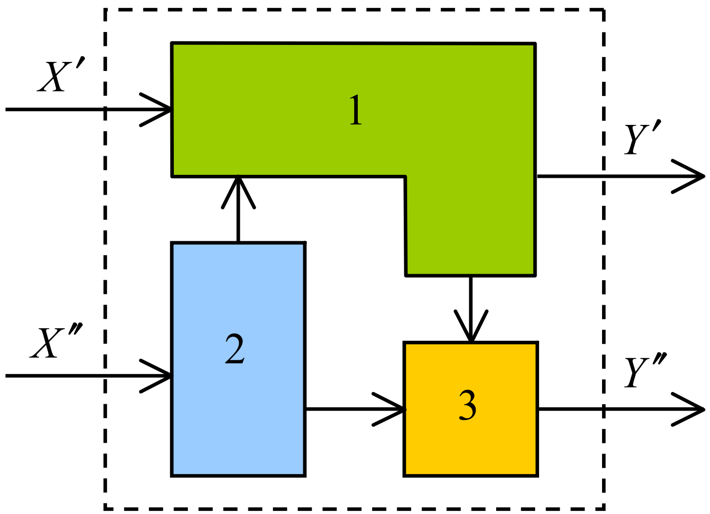
1.9 Методологии и технологии программирования



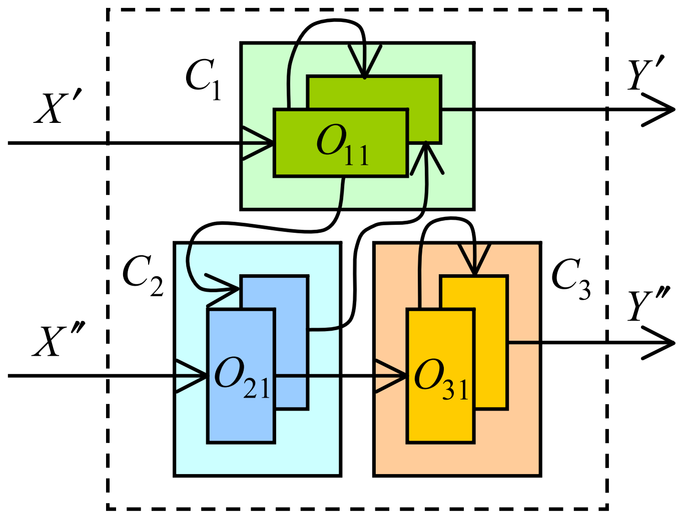
Дискретный объект



Функциональная декомпозиция



Структурная декомпозиция



Объектная декомпозиция

1.10 Семантический разрыв

Декомпозиция	Методология	Технология
Функциональная декомпозиция	Функциональный анализ	Процедурное программирование
Структурная декомпозиция	Структурный анализ	Модульное программирование
Объектная декомпозиция	Объектный анализ	Объектно-ориентированное программирование
Онтологическая декомпозиция	***Понятийный анализ***	***Контекстное программирование***

Семантический разрыв – явление несоответствия средств, служащих для описания предметной области тем средствам, которые используются для реализации этого описания.

Низкое качество и надежность программных средств – следствие трудно преодолимого семантического разрыва между результатами анализа предметной области и теми средствами, которые используются для формализации этих результатов.

Глава 2 Алгебраическая декомпозиция

2.1 Постановка задачи

Нерегулярные формы (декомпозиция общего вида)

$$f(X) = g(h(X'), X''),\ X' \cup X'' = X$$

Регулярные формы (алгебраическая декомпозиция)

$$f(X) = \sum \theta_i(X') \times a_i(X''),\ X' \cap X'' = \varnothing$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} \times \mathbf{A} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{Q} \times \mathbf{F})$$

Частные случаи (решающее и спектральное разложение)

$$f(X) = \sum \theta_i(x) \times a_i(X \setminus x)$$

$$f(X) = \sum \theta_i(X) \times a_i$$

Образующая алгебра – алгебраическая система, позволяющая синтезировать формульное описание функции при ее алгебраической декомпозиции.

2.2 Разделение переменных (пример)

$$f(x) = [3, 0, 1, 2, 2, 1]$$

Таблица истинности

x	x'	x''	f
0	0	0	3
1	0	1	0
2	0	2	1
3	1	0	2
4	1	1	2
5	1	2	1

Двумерная таблица

$x' \setminus x''$	0	1
0	3	2
1	0	2
2	1	1

2.3 Алгебра логики $R_L = \langle N_k, +, \times \rangle$

Теорема 4.1. Пусть в N_k существуют такие элементы σ (***нуль***) и $\tau \neq \sigma$ (***единица***), что $\sigma + a = a$, $a + \sigma = a$, $\sigma \times a = \sigma$, $\tau \times a = a$. Тогда **D** должна быть матрицей ***перестановок***, а $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^T$.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \\ 3 & * & * & * \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(x', x'') = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}(x') \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x'') + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}(x') \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x'') + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x') \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}(x'')$$

2.4 Мультипликативная алгебра $R_M = \langle N_k, +, \times \rangle$

Теорема 4.2. Пусть R_M удовлетворяет условиям R_L, а умножение образует ***группу*** $G_M = \langle N_k \setminus \sigma, \times \rangle$. Тогда **D** должна быть ***мономиальной*** матрицей, а $\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{D}}^T$.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \\ 3 & * & * & * \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{\mathbf{D}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x', x'') = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} (x'') + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} (x'') + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (x'')$$

2.5 Аддитивная алгебра $R_A = \langle N_k, +, \times \rangle$

Теорема 4.3. Пусть R_A удовлетворяет условиям R_L, а сложение образует ***коммутативную группу*** $G_A = \langle N_k, + \rangle$. Тогда **D** должна быть ***биполярной*** матрицей, модуль определителя сопряженной ей матрицы $\mathbf{D}^*$ не равен нулю и меньше циклического порядка группы G_A, а
$\Delta \cdot \mathbf{A} = \overline{\mathbf{D}}^T \cdot \mathbf{F}$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{D}}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x', x'') = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} (x'') + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (x'') + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (x'')$$

2.6 Фундаментальные алгебры $R_F = \langle N_k, +, \times \rangle$

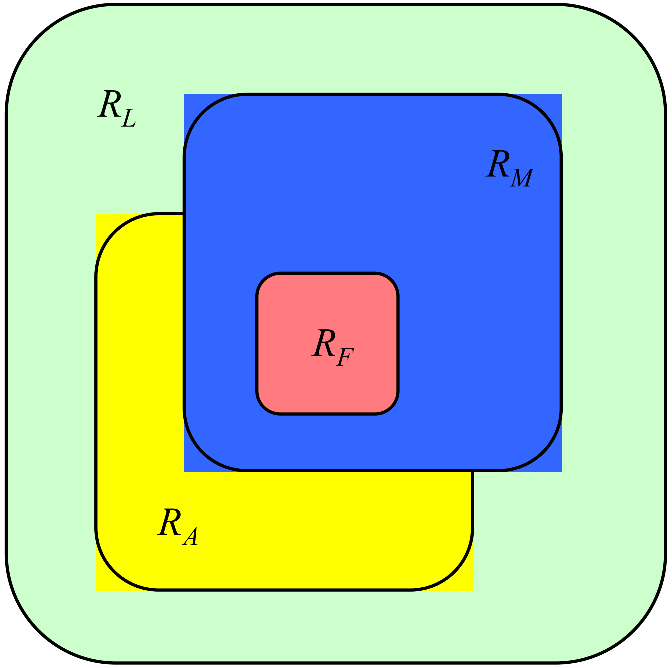
Если операции R_F образуют ***поле*** на множестве N_k или ***целостное кольцо*** на N_0 и, тем самым, удовлетворяют условиям алгебр R_A, R_L и R_M одновременно. Тогда **D** должна быть ***обращаемой*** матрицей, а $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1}$.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

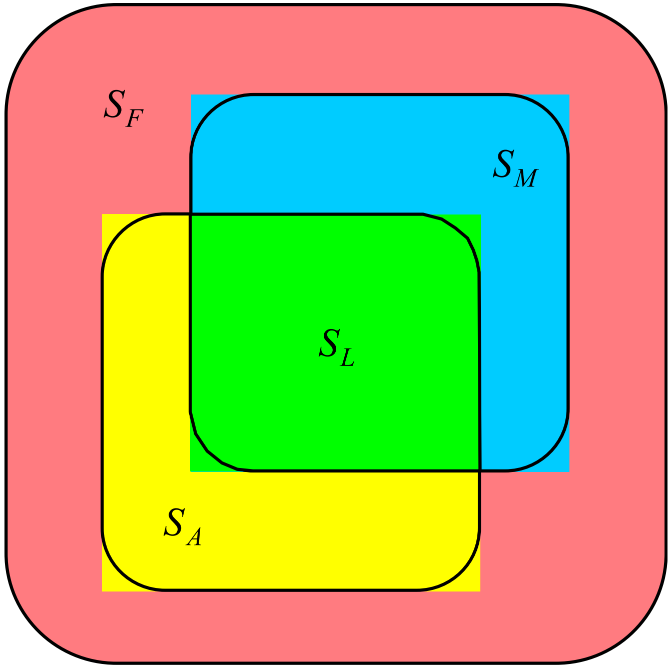
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x', x'') = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (x'') + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} (x'') + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} (x') \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (x'')$$

2.7 Свойства образующих алгебр



Классы образующих алгебр



Классы частичных функций

Класс функций	***Двузначные***	***Многозначные***
Унимодальные	Алгебры логики	Мультипликативные алгебры
Мультимодальные	Аддитивные алгебры	Фундаментальные алгебры

2.8 Синтез формул (на примере в R_A)

$$+=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{bmatrix}\quad \times=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}=[3\,2\,2\,1\,0\,2\,3\,1\,2\,1\,0\,3\,1\,0\,3\,0\,2\,0\,0\,2\,0\,2\,2\,0]$ $\mathbf{K}=[2\,2\,3\,2]$

$X=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$ $X'=\{x_1,x_3\}$ $X''=\{x_0,x_2\}$

$$f=\theta_0(x')\times a_0(x'')+\theta_1(x')\times a_1(x'')+\theta_2(x')\times a_2(x'')+\theta_3(x')\times a_3(x'')$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\tau&\phi&\phi&\phi\\\tau&\tau&\phi&\phi\\\tau&\phi&\tau&\phi\\\tau&\phi&\phi&\tau\end{bmatrix}\quad \widetilde{\mathbf{D}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\quad \overline{\mathbf{D}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\Delta=1$

$$\Delta\cdot\mathbf{A}=\overline{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&2&0&2&2&0\\2&1&3&1&1&3\\1&0&2&0&0&2\\3&2&0&2&2&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&0&2&2&0\\3&3&3&3&3&3\\2&2&2&2&2&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$f(X)=\begin{bmatrix}3\\2\\0\\2\\2\\0\end{bmatrix}x''+\begin{bmatrix}3\\0\\3\\3\end{bmatrix}x'\times 3+\begin{bmatrix}3\\3\\0\\3\end{bmatrix}x'\times 2+\begin{bmatrix}3\\3\\3\\0\end{bmatrix}x'\times 0=\begin{bmatrix}3\\2\\0\\2\\2\\0\end{bmatrix}(x_0,x_2)+\begin{bmatrix}0\\3\\2\\0\end{bmatrix}(x_1,x_3)$$

$$f(X)=x_0\begin{bmatrix}3&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}x_2+x_1\begin{bmatrix}0&2\\3&0\end{bmatrix}x_3=x_0\circ_0 x_2+x_1\circ_1 x_3$$

3.1 Постановка задачи

Эффективный синтез – получение описания дискретной функции, с количеством операций, не превосходящим максимально необходимое для всех функций той же размерности. ***Минимизация*** – нахождение описания дискретной функции, включающего наименьшее из возможных число операций.

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1}\theta_i(X')\times a_i(X''),\quad \phi\times a_i(X'')=\sigma$$

Сложность разложения – количество слагаемых M, ***сложность представления*** – количество операций L.

$$\left[\begin{array}{cccc:cc}
\tau & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\
\phi & \tau & \phi & \phi & \phi & \phi \\
\phi & \phi & \tau & \phi & \phi & \phi \\
\phi & \phi & \phi & \tau & \phi & \phi \\
\hdashline
* & * & * & * & \tau & \phi \\
* & * & * & * & \phi & \tau
\end{array}\right]\times\left[\begin{array}{cccc}
+ & + & + & + \\
+ & + & + & + \\
+ & + & + & + \\
+ & + & + & + \\
\hdashline
\phi & \phi & \phi & \phi \\
\phi & \phi & \phi & \phi
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}
+ & + & + & + \\
+ & + & + & + \\
+ & + & + & + \\
+ & + & + & + \\
\hdashline
\sim & \sim & \sim & \sim \\
\sim & \sim & \sim & \sim
\end{array}\right]$$

3.2 Аналитические конструкции

Классы формул	Бесповторные	Повторные
Бесскобочные	*Бесповторные бесскобочные*	Повторные бесскобочные
Скобочные	*Бесповторные скобочные*	Повторные скобочные

$$\theta_i(X) = \neg_0 x_{i_0} \bullet_0 \neg_1 x_{i_1} \bullet_1 \ldots \bullet_{n-2} \neg_{n-1} x_{i_{n-1}}$$

Приведение к ***канонической форме*** – исключение унарных операций и фиктивных переменных.

$$\theta_i(X) = x_{i_0} \circ_0 x_{i_1} \circ_1 x_{i_2} \circ_2 \ldots \circ_{n-2} x_{i_{n-1}}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & x_1 & & x_2 & & x_{n-1} & \\
x_0 & \left.\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}\right\} k_0 & \rightarrow & \left.\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}\right\} k & \cdots & \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} & \rightarrow \theta(X) \\
 & \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{k_1} \quad \circ_0 & & \circ_1 & & \circ_{n-2} &
\end{array}$$

3.3 Порождение функций

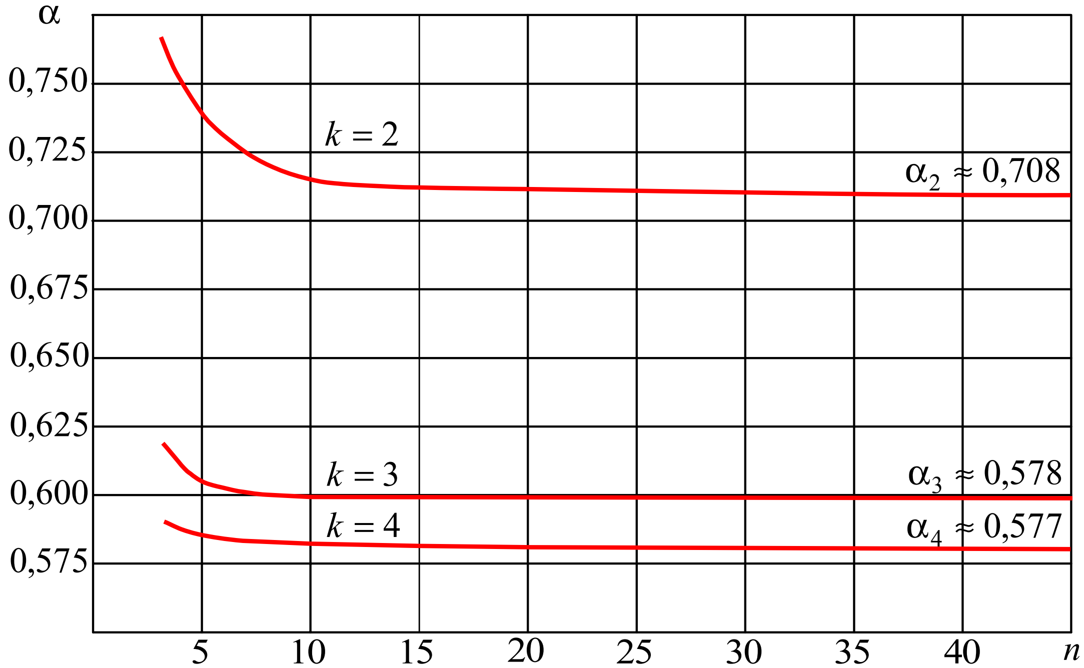
$$
x_0 \underbrace{\overset{x_1}{\left.\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}\right\}k_0}}_{k_1} \circ_0 \rightarrow \underbrace{\overset{x_2}{\left.\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ \hdashline * & * & \cdots & * \end{bmatrix}\right\}k}}_{k_2} \circ_1 \;\cdots\; \overset{x_{n-1}}{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ \hdashline * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}\, \circ_{n-2} \; k-1 \rightarrow \theta(X)
$$

$$
k^{k_0 k_1 + (k-1)\sum_{i=2}^{n-1} k_i} < N_\theta^*(k, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) < k^{k_0 k_1 + k\sum_{i=2}^{n-1} k_i}
$$

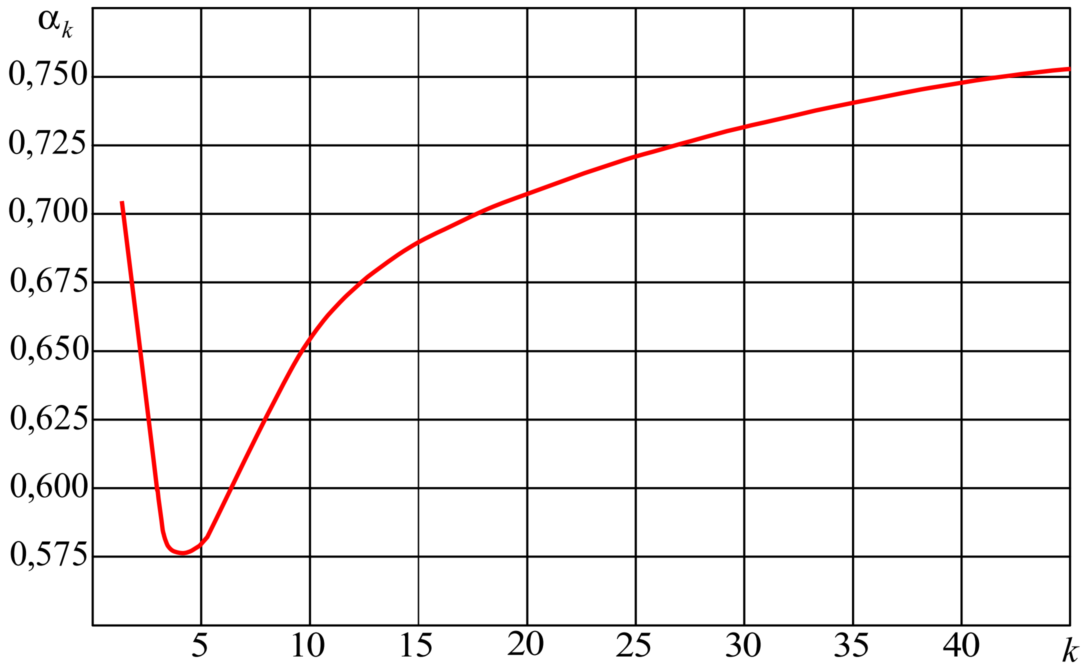
$$
N_\theta^*(k, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) = k^{k_0 k_1 + (k-\alpha)\sum_{i=2}^{n-1} k_i} = k^{(k-\alpha)\left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta\right)}
$$

$$
0 < \alpha < 1, \quad \beta = k_0 + k_1 - \frac{k_0 k_1}{k-\alpha} \approx k
$$

3.4 Порождающая способность



$$\alpha = k - \frac{\log_k N_\theta^* - k_0 k_1}{\sum_{i=2}^{n-1} k_i}$$



$$\alpha_k = k - \frac{1}{k} \log_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{k^k - i}{i+1}$$

3.5 Спектральный синтез формул

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1}\theta_i(X)\times a_i=\sum_{i=0}^{M-1}\theta_i(X)$$

$$\begin{bmatrix}\theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \vdots & \phi\\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \vdots & \phi\\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \vdots & \phi\\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \vdots & \phi\\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \vdots & \phi\\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \vdots & \phi\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}+\\+\\+\\+\\+\\ \hline \phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}*\\*\\*\\*\\*\\*\end{bmatrix}$$

Различные ***линейные комбинации*** частичных функций, взятые с точностью до множителя, порождают различные функции.

$$M=\frac{1}{k-\alpha}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}k_i}{\sum_{i=0}^{n-1}k_i-\beta},\quad L=\frac{n}{k-\alpha}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}k_i}{\sum_{i=0}^{n-1}k_i-\beta}=\frac{C}{2}m,\quad C=\frac{1}{k-\alpha}\frac{2}{\frac{1}{n}(\sum_{i=0}^{n-1}k_i-\beta)}.$$

$$M\sim\frac{C_\infty}{2}\frac{m}{n},\qquad L\sim\frac{C_\infty}{2}m,\qquad C_\infty=\frac{1}{k-\alpha_k}\frac{2}{\overline{k}}.$$

3.6 Алгебраический синтез формул

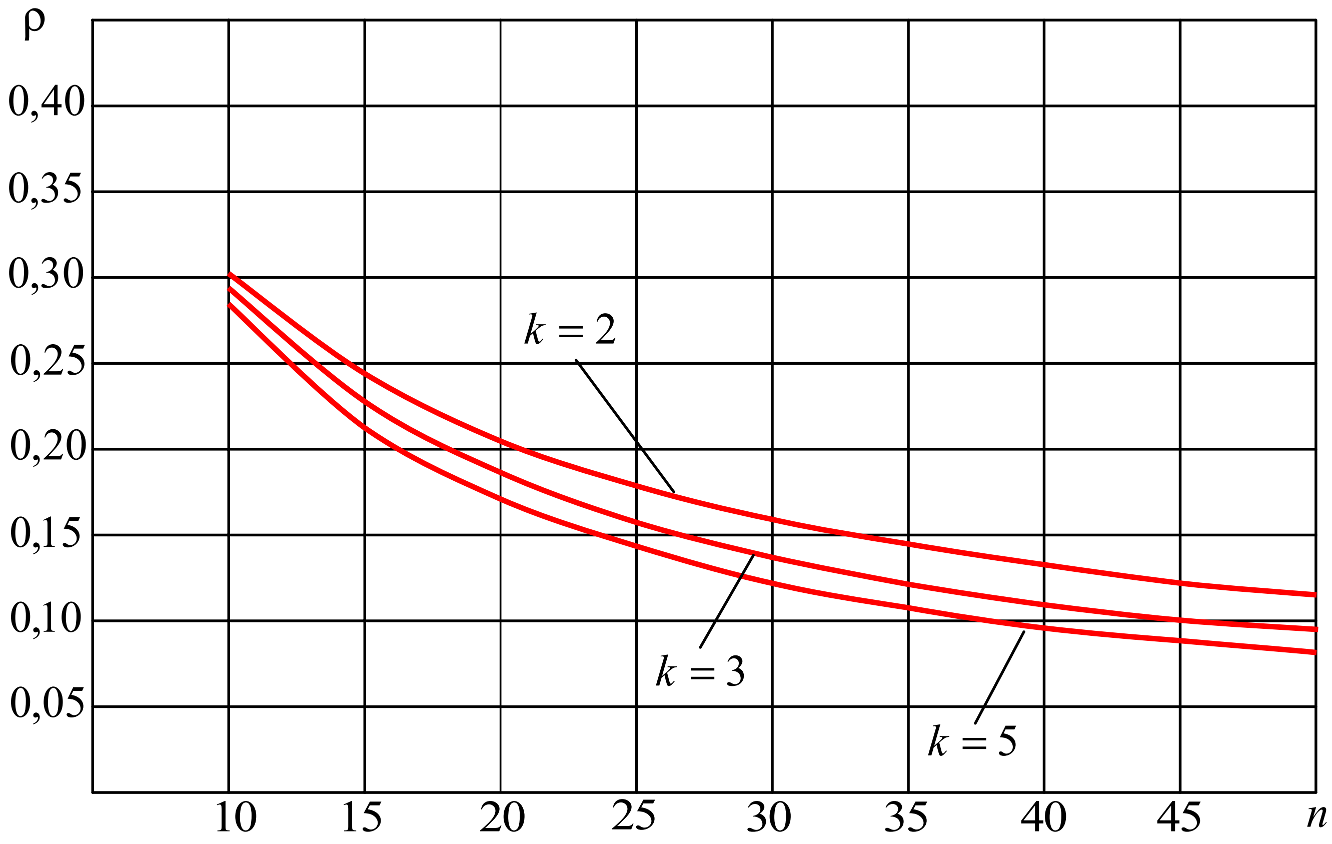
$$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1}\theta_i(X')\times a_i(X'')\quad \left[\begin{array}{cccc:cc}\theta'_0 & \theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3 & \phi & \phi\\ \theta'_0 & \theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3 & \phi & \phi\\ \theta'_0 & \theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3 & \phi & \phi\\ \theta'_0 & \theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3 & \phi & \phi\\ \theta'_0 & \theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3 & \phi & \phi\\ \theta'_0 & \theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3 & \phi & \phi\end{array}\right]\times\left[\begin{array}{cccc}+ & + & + & +\\ + & + & + & +\\ + & + & + & +\\ + & + & + & +\\ \hdashline \phi & \phi & \phi & \phi\\ \phi & \phi & \phi & \phi\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}* & * & * & *\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\end{array}\right]$$

$$M=\frac{4}{(k-\alpha)^2}\,\frac{\prod_{i=0}^{n-1}k_i}{\left(\sum_{i=0}^{n-1}k_i-\sum_{j=0}^{\gamma-1}\beta_j\right)^2-\rho^2n^2},\qquad L=C^2\frac{m}{n},$$

$$C=\frac{1}{k-\alpha}\,\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}k_i-\sum_{j=0}^{\gamma-1}\beta_j\right)\right)^2-\rho^2}},\qquad \rho=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n'-1}k'_i-\sum_{j=0}^{n''-1}k''_j\right).$$

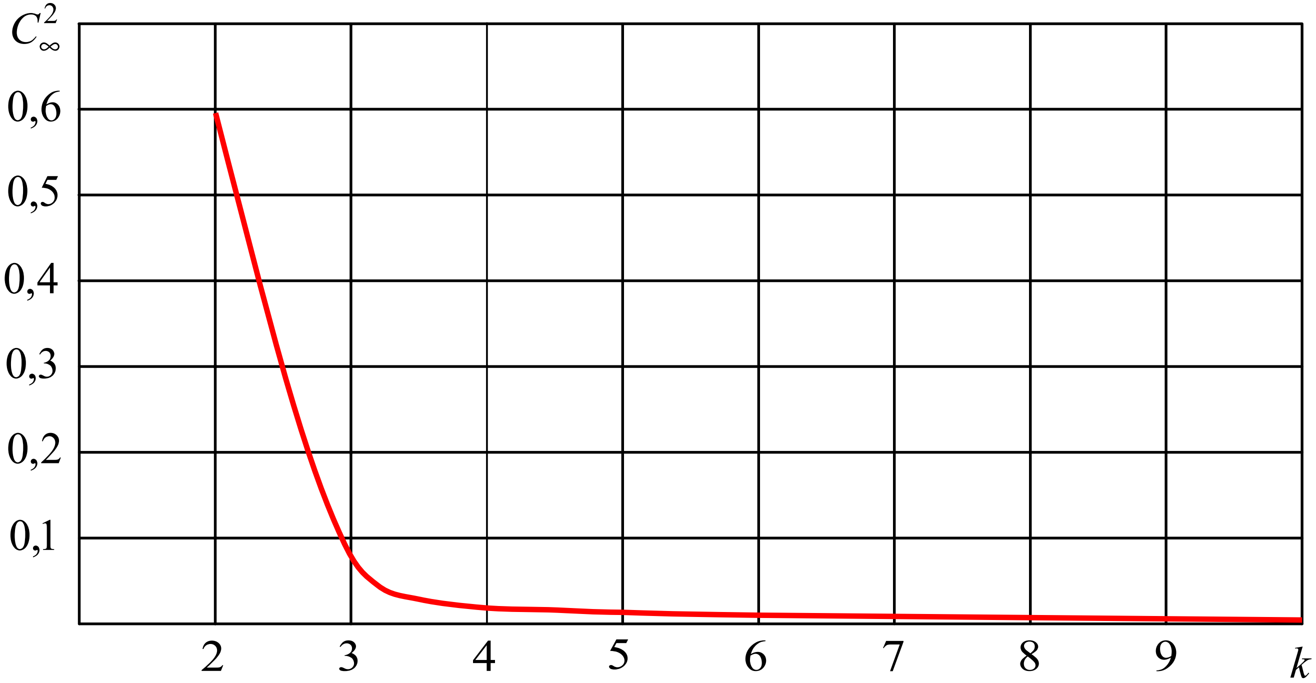
3.7 Оптимальное разделение переменных

$$\rho = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n'-1} k_i' - \sum_{j=0}^{n''-1} k_j''\right)$$



3.8 Асимптотические оценки

$$M \sim C_\infty^2 \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{n^2}, \quad L \sim C_\infty^2 \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{n}, \quad C_\infty = \frac{1}{k-\alpha_k} \frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} k_i}.$$



$$L(n) \sim \frac{4}{(1+\log_2 3)^2} \frac{2^n}{n} \approx 0{,}5986 \frac{2^n}{n}$$

3.9 Эффективность дискретной обработки

$$L = \frac{4}{n(k-\alpha)^2} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - 2\beta\right)^2 - \rho^2}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \rho < 0{,}3.$$

D – объем обрабатываемых данных, бит;

R – разрядность процессора, бит, $R \ll D$.

$$L \approx \frac{r}{2^r} \frac{2^D}{D}, \quad r = 4R$$

$$\omega = \frac{L}{\tilde{L}}$$

4.1 Постановка задачи

Допущение: В процессе изучения предметной области и специфики решаемых прикладных задач выявляется система понятий и находятся декомпозиционные схемы, наиболее приспособленные для постановки и решения этих задач.

1). Поиск оптимальных декомпозиционных схем будем осуществлять на основе ***понятийного анализа*** предметной области.

2). Для формальной спецификации результатов анализа будем строить ***специализированный язык***. Выявленную в процессе анализа понятийную структуру отразим в понятиях создаваемого языка, а найденные декомпозиционные схемы преобразуем в языковые конструкции.

3). Предусмотрим средства для определения семантики специализированного языка и осуществим ***семантическое замыкание*** создаваемых формальных спецификаций предметной области.

4). Решение задач на рассматриваемой предметной области будем осуществлять путем ***описания решения*** на созданном языке.

4.2 Определения

Предметная область – фрагмент действительности, представляемый совокупностью принадлежащих ему сущностей.

Сущность – устойчивое и уникальное представление о выделенной части предметной области.

Признак – именованная сущность, характеризуемая множеством своих проявлений (значений) и имеющая проблемную интерпретацию (семантическую роль).

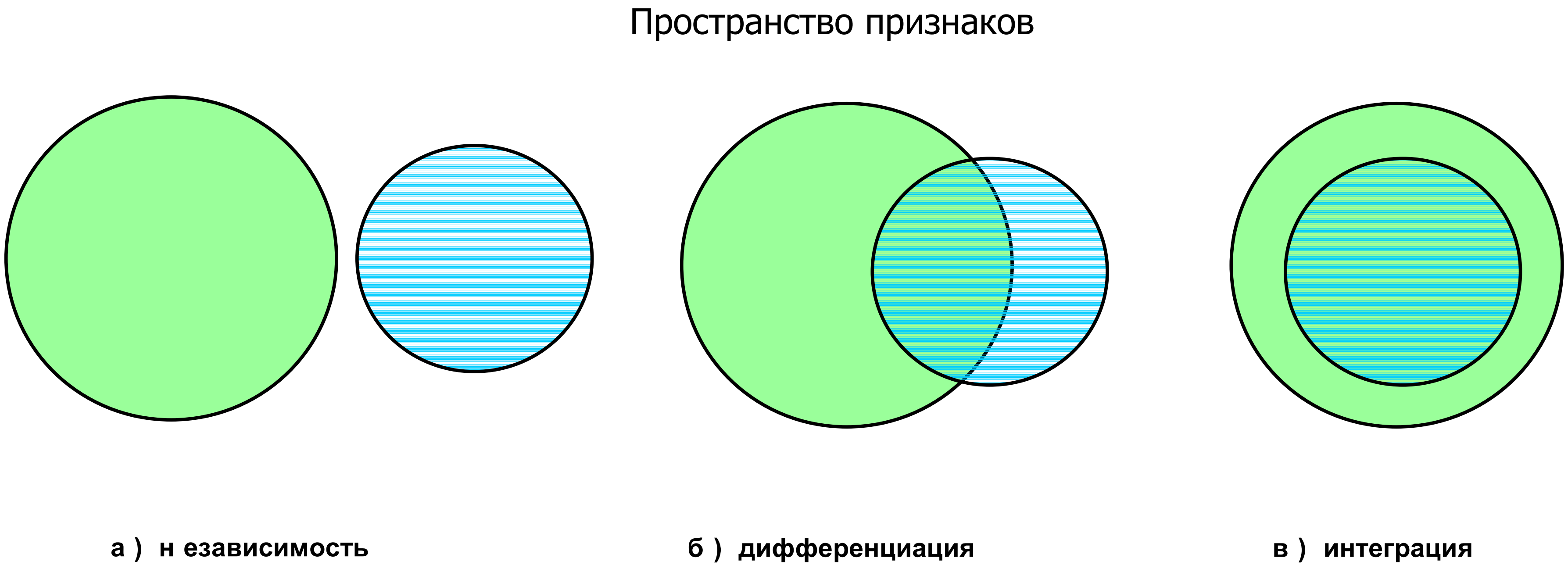
Понятие – именованное множество сущностей, объединенных на основе общности своих признаков.

Схема понятия – набором признаков, на которых понятие определено.

Интенсионал – набором значений взаимосвязанных признаков, позволяющим отличать сущности, принадлежащие понятию от других сущностей.

Экстенсионал – множество сущностей, принадлежащих понятию.

4.3 Абстрагирование понятий



Абстрагирование – форма мышления, при которой образуются новые понятия на основе выделения общих и существенных и признаков абстрагируемых понятий. Известны следующие виды абстракции:

– обобщение-специализация (типизация-конкретизация);

– агрегация-декомпозиция (ассоциация-индивидуализация).

4.4 Абстракции

Обобщение – порождение понятия на основе пересечения схем и расширенного объединения экстенсионалов. ***Специализация*** – из понятия выделяют схожие с ним понятия.

Типизация – порождение понятия на основе пересечения схем и объединения экстенсионалов. ***Конкретизация*** – из понятия выделяют входящие в него понятия.

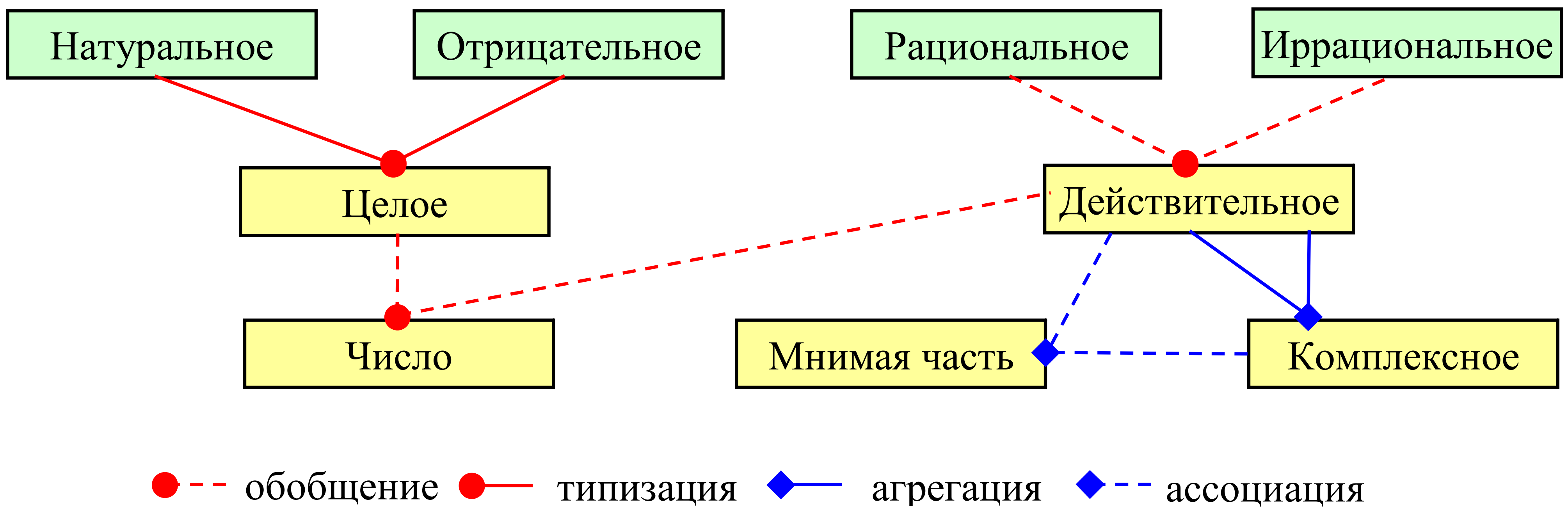
Агрегация – порождение понятия на основе объединения схем и декартового произведения экстенсионалов. ***Декомпозиция*** – из понятия выделяют содержащиеся в нем понятия.

Ассоциация – порождение понятия на основе объединения схем и ограничения декартового произведения экстенсионалов. ***Индивидуализация*** – из понятия выделяют связанные им понятия.

4.5 Понятийная структура

Понятийная структура – совокупность понятий и отображений абстрагирования, установленных между ними.

$$S = \langle C,\ G,\ T, A, B \rangle$$



4.6 Понятийный анализ

Понятийный анализ – методика построения и верификации понятийной структуры предметной области.

Верификация – установление полноты и непротиворечивости понятийной структуры, а также выполнение сопутствующих тождественных преобразований.

Понятийный анализ	**Объектный анализ**
Сущность:	***Объект***:
– обладает уникальностью (имя); – имеет признаки (синтаксис); – выражает смысл (семантика).	– обладает идентичностью; – имеет состояние; – проявляет поведение.
Понятие:	***Класс***:
множество сущностей, объединенных на основе общности признаков.	множество объектов, имеющих общую структуру и общее поведение.
Структура понятия:	***Спецификация класса***:
– имя (уникальность), схема (признаки); – интенсионал (содержание); – экстенсионал (состав).	– имя (идентичность); – свойства (состояние); – методы (поведение).
Признак (элементарное понятие):	***Свойство*** (атрибут):
– имя; – семантическая роль (интенсионал); – домен (экстенсионал).	состояние объекта характеризуется перечнем свойств и их текущими значениями.

4.7 Понятийный и объектный анализ

Понятийный анализ	Объектный анализ
Взаимосвязь понятий:	***Взаимосвязь классов***:
– обобщение (есть некоторый); – типизация (есть экземпляр); – агрегация (есть часть); – ассоциация (есть связь).	– общее и частное (наследование); – целое и часть (агрегация); – зависимость (ассоциация).
Обобщение (пересечение схем):	***Наследование***:
понятие-обобщение содержит общие признаки обобщаемых понятий.	один класс повторяет структуру и поведение другого класса.
Агрегация (объединение схем):	***Агрегация***:
понятие-агрегат включает признаки агрегируемых понятий.	отношения целого и части, приводящие к иерархии объектов.
Ассоциация (ограниченная агрегация):	***Ассоциация***:
понятие-ассоциация устанавливает связи между сущностями понятий.	зависимость классов, обеспечивающая переход между объектами этих классов.
Типизация (ограниченное обобщение):	***Виртуальные классы***:
понятие-тип обобщает понятия с возможностью их идентификации.	виртуальный класс замещается различными дочерними классами.
Понятийная структура:	***Диаграммы***:
структура, заданная на множестве понятий с отображениями абстрагирования.	иерархия классов с наследованием и иерархия объектов с агрегацией.

Понятийный анализ базируется на предельно общих и универсальных формах декомпозиции предметной области.

4.8 Контекстная технология

Контекстная технология – совокупность методов и средств, объединенных на основе методологии понятийного анализа и предназначенные для оптимального описания дискретной обработки данных.

Принципы контекстной технологии:

– создание специализированного языка для решения задачи;

– контекстная интерпретация текстов программы;

– описание семантики создаваемого языка средствами самого языка;

– элементарные семантические единицы реализуются средствами целевой вычислительной платформы.

Программа = Модель + Решение задачи.

Модель = Структура + Синтаксис + Семантика.

4.9 Метаязык

Метязык – язык для выражения суждений об определяемом языке.

Метаязык контекстной технологии – предназначен для задания специализиро-ванного языка.

<table>
<tr><td>1</td><td>program</td><td>→</td><td>declaration [situation] | declaration situation program</td></tr>
<tr><td>2</td><td>declaration</td><td>→</td><td>essence | essence declaration</td></tr>
<tr><td>3</td><td>essence</td><td>→</td><td>differenciation notion integration [description]</td></tr>
<tr><td>4</td><td>differenciation</td><td>→</td><td>'(' [notions] ')'</td></tr>
<tr><td>5</td><td>integration</td><td>→</td><td>'(' [notions] ')'</td></tr>
<tr><td>6</td><td>notions</td><td>→</td><td>notion | notion notions</td></tr>
<tr><td>7</td><td>description</td><td>→</td><td>sentence | sentence description</td></tr>
<tr><td>8</td><td>sentence</td><td>→</td><td>[aspect] syntax [execution [compilation]] semantic</td></tr>
<tr><td>9</td><td>syntax</td><td>→</td><td>item [compilation] | item [compilation] syntax</td></tr>
<tr><td>10</td><td>item</td><td>→</td><td>notion [alias] | lexeme [alias]</td></tr>
<tr><td>11</td><td>alias</td><td>→</td><td>'`' <b><i>terms</i></b> '`'</td></tr>
<tr><td>12</td><td>lexeme</td><td>→</td><td>term | pattern</td></tr>
<tr><td>13</td><td>term</td><td>→</td><td>'′' [terms] '′'</td></tr>
<tr><td>14</td><td>pattern</td><td>→</td><td>'″' [terms] '″'</td></tr>
<tr><td>15</td><td>semantic</td><td>→</td><td>definition | definition semantic</td></tr>
<tr><td>16</td><td>definition</td><td>→</td><td>[aspect] '{' [text] '}'</td></tr>
<tr><td>17</td><td>execution</td><td>→</td><td>'<' [text] '>'</td></tr>
<tr><td>18</td><td>compilation</td><td>→</td><td>'[' [text] ']'</td></tr>
<tr><td>19</td><td>situation</td><td>→</td><td>[aspect] '<' [text] '>'</td></tr>
<tr><td>20</td><td>text</td><td>→</td><td>phrase | phrase text</td></tr>
<tr><td>21</td><td>phrase</td><td>→</td><td>terms | [aspect] '{' text '}'</td></tr>
</table>

4.10 Понятийная модель

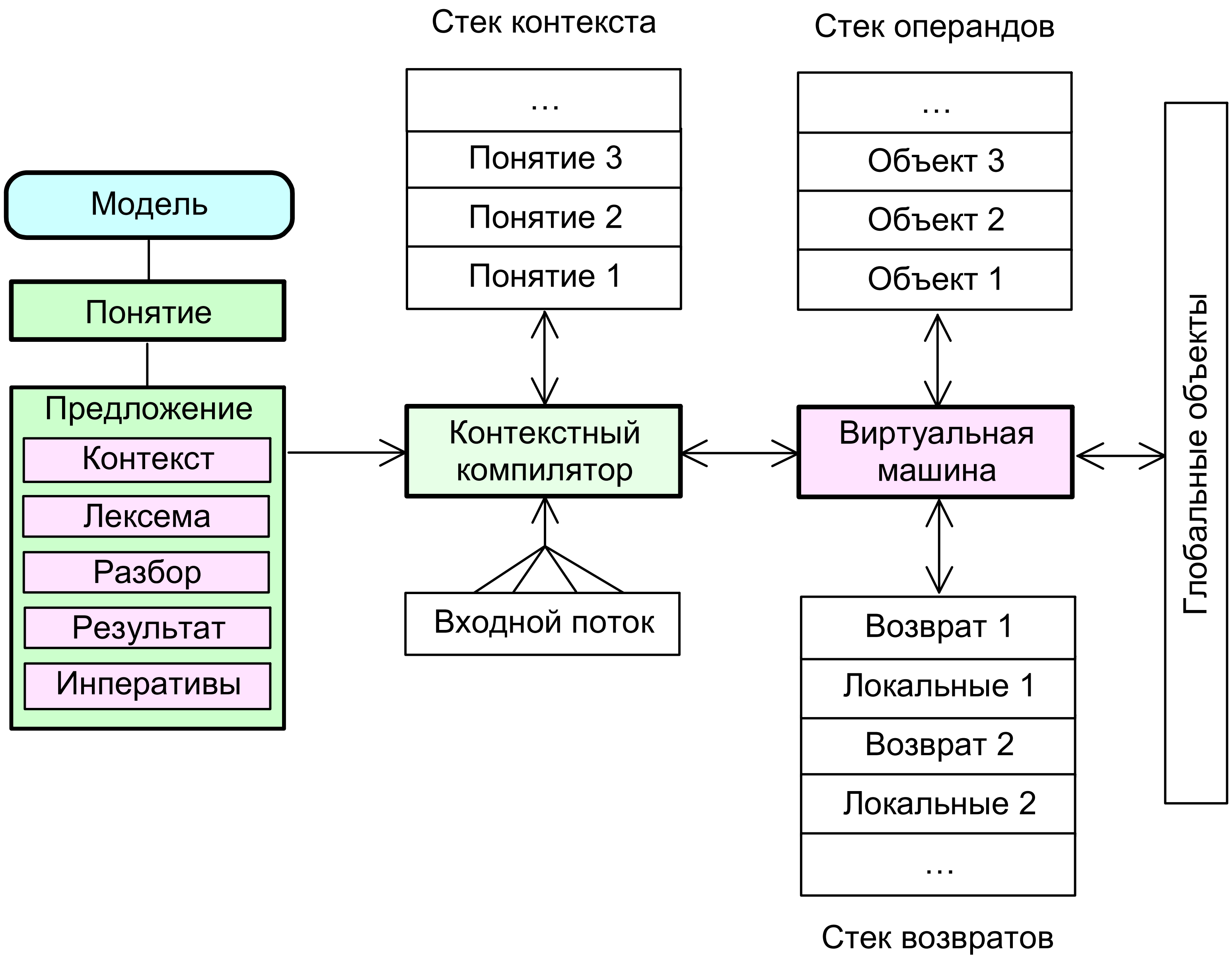
```
() Variable
    ”[A-Za-z][A-Za-z0-9]*” {…}
() Constant
    'false' { asm{ mov eax, 0; push eax } }
    'true' { asm{ mov eax, -1; push eax } }
(Variable) Logic
    Variable { asm{ pop ebx; mov eax, [ebx]; push eax } }
    Integer { asm{ pop eax; cmp eax, 0; je label; mov eax, -1; label: push eax } }
    '(' Boolean ')' {}
(Constant Logic) Negation
    'not' Logic { asm{ pop eax; not eax; push eax } }
(Negation) Conjunction
    Negation 'and' Negation { asm{ pop eax; pop edx; and eax, edx; push eax } }
(Conjunction) Disjunction
    Conjunction 'or' Conjunction { asm{ pop eax; pop edx; or eax, edx; push eax } }
(Disjunction) Boolean
    Disjunction `a` 'imp' Disjunction `b` { not a or b }

<(not x or y) and z> fuzzy < (not x or y) and z >
```

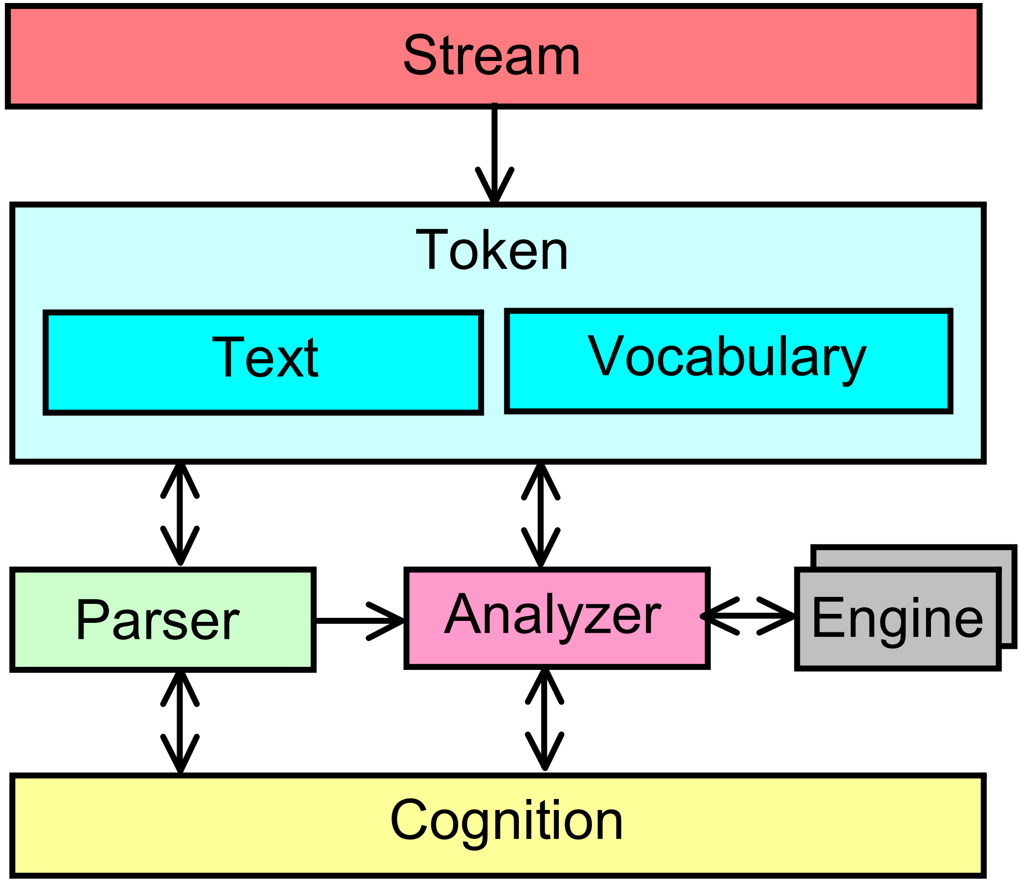
4.11 Семантика

```
() Expression ()
    ”[0-9]+” `n`
        { n } dif{ ‘0’ }
    'x'
        { 'x' } dif { '1' }
    '(' Expression ')' `exp`
        { '(' & exp & ')' } dif { '(' & dif { exp } & ')' }
    'sin' '(' Expression `exp` ')'
        { 'sin(' & exp & ')' } dif { 'cos(' & exp & ')*(' & dif { exp } & ')' }
    'cos' '(' Expression `exp` ')'
        { 'cos(' & exp & ')' } dif { '–sin(' & exp & ')*(' & dif { exp } & ')' }
    '–' Expression `exp`
        { '–' & exp } dif { '–' & dif { exp } }
    Expression `exp1` '*' Expression `exp2`
        { exp1 & '*' & exp2 }
        dif { '('& exp1 & '*' & dif { exp2 } & '+' & dif { exp1 } & '*' & exp2 & ')' }
    Expression `exp1` ”+ | –” `oper` Expression `exp2`
        { exp1 & oper & exp2 } dif { '(' & dif { exp1 } & oper & dif { exp2 } & ')' }
```

5.2 Архитектура системы



5.3 Структура системы



Заключение

1). Развита теория алгебраической декомпозиции дискретных функций на основе объединения алгебраических методов, разделительной декомпозиции и ортогональных разложений в широком спектре алгебраических систем. В частности:

– показано существование четырех типов образующих алгебр (алгебры логики, мультипликативной, аддитивной и фундаментальной алгебр), изучены их свойства и доказаны условия существования алгебраических разложений;

– найдены четыре класса частичных функций (унимодальные и мультимодальные, двузначные и многозначные), имеющие различную сложность реализации и позволяющие эффективно использовать для дискретной обработки данных вычислительные средства с различными операционными возможностями;

– предложен метод многоступенчатого синтеза формул, позволяющий учесть нетривиальные свойства декомпозируемой функции и получить более компактные формульные представления.

Заключение

2) Обоснована методика оптимального синтеза дискретных функций, выполняемая при двухступенчатой алгебраической декомпозиции в аддитивной и фундаментальной алгебре и базирующаяся на следующих результатах:

– выполнен анализ порождающей способности формул и установлено, что для оптимального синтеза достаточно использовать бесповторные бесскобочные формулы с фиксированным порядком переменных;

– доказано, что при оптимальном синтезе не требуется проверять все варианты разделения переменных, минимизация сложности представления обеспечивается оптимальным их разделением;

– получены точные, приближенные и асимптотические оценки сложности синтезируемых формул и доказано, что количество операций, необходимое для представления дискретных функций не хуже наилучших известных оценок;

– разработана методика оценки оптимальности и степени минимизации формального описания дискретной обработки данных, что позволяет сравнивать по эффективности различные ее реализации.

Заключение

3) Предложена методология понятийного анализа предметной области, позволяющая получать оптимальные декомпозиционные схемы для дискретной обработки данных в виде семантически замкнутых формальных спецификаций. Для осуществления последней:

– формализованы известные виды абстракции понятий и найдены методы верификации понятийной структуры предметной области путем ее тождественных преобразований и проверки на полноту и непротиворечивость;

– разработан метаязык для спецификации результатов понятийного анализа, предусматривающий выразительные средства для определения понятийной структуры, синтаксиса выражения понятий в тексте и многоаспектного описания семантики;

– найден универсальный метод определения семантики формальных языков на основе концепции самоопределения понятийной модели, осуществляемый посредством семантического замыкания и заключающийся в определении необходимых семантических категорий по мере необходимости, в процессе описания предметной области и описанными ранее средствами.

Заключение

4) Разработана контекстная технология обработки данных на основе отражения понятийной структуры предметной области в понятиях создаваемого специализированного языка, а получаемые при понятийном анализе декомпозиционные схемы – в его языковых конструкциях. Для реализации системы контекстного программирования:

– предложен метод разнесенного грамматического разбора, позволяющий выполнять эффективный анализ текста, порожденного контекстными и неоднозначными грамматиками;

– реализовано определение семантики понятийной модели средствами различных уровней: от команд процессора целевой вычислительной платформы до текстов на целевом языке программирования.