Автоматика и телемеханика. 2006. № 3. С. 20-56.

© 2006 г. В.С. Выхованец, канд. техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается проблема функциональной декомпозиции дискретных систем, сводимая к декомпозиции дискретных функций, где под декомпозицией понимается представление функции формулой в базисе унарных и бинарных операций. Исследуется алгебраическая декомпозиция, выполняемая в алгебре, образованной двумя бинарными операциями и функциями двух переменных. Обосновывается методика синтеза формул на основе композиции бесповторных подформул. Даются как точные, так и асимптотические оценки сложности синтезируемых формул.

1. Введение

Один из универсальных подходов при решении различных научных и технических проблем – декомпозиция функций. При декомпозиции функция представляется как композиция функций меньшей размерности. В пределе, необходимом для практической реализации, композиция строится из переменных и операций, непосредственно реализуемых вычислительным устройством.

История декомпозиции дискретных функций связана в основном с декомпозицией булевых функций, задаваемых на множествах из двух элементов. Первая работа из этой области – фундаментальная книга Буля [1] (1854), положившая начало теории декомпозиции. После длительного перерыва Жегалкин опубликовал работу [2] (1927), посвященную преобразованиям булевых функций и заложил основы современных методов ортогональных преобразований. Начало эпохи прикладного логического синтеза связано с именами Шеннона [3, 4] (1938, 1949) и Гаврилова [5, 6] (1945, 1946).

Первые результаты по табличной декомпозиции функции на основе разделения переменных получены Ашенхерстом [7] (1952) и Семоном [8] (1952), а аналитическое описание разделительной декомпозиции дано Поваровым [9] (1954). В развитие результатов Жегалкина Рид [10] (1954) и Маллер [11] (1954) ввели понятие аналитической конструкции и использовали разложение функций в форме, известной в настоящее время как каноническая форма Рида-Маллера. Множественная или кратная декомпозиция исследована Кертисом [12] (1958), концепция дифференцирования булевых функций предложена Акерсом [13] (1959), а совместная минимизация систем булевых функций при разделительной декомпозиции осуществлена Ротом и Карпом [14, 15] (1960, 1962).

Изучению ограниченных классов дискретных функций и частных случаев декомпозиции посвящены работы по бесповторной декомпозиция Кузнецова [16] (1958), линейным преобразованиям переменных при минимизации Нечипорука [17] (1958), каскадной декомпозиции Майтры [18] (1962). Представление функций решающими диаграммами исследовано Ли [19] (1959) и Акерсом [20] (1978). Спектральные формы использованы Карповским и Москалевым [21] (1970), а метод декомпозиции, основанный на спектральных разложениях, – Лечнером [22] (1971).

Развитие теории декомпозиции связано с работами в области синтеза схем из функциональных элементов. Метод каскадов, основанный на разделительной декомпозиции, разработан Поваровым [23] (1955). Каноническому синтезу на базе табличных представлений посвящена работа Блоха [24] (1961). Декомпозиция в базисе произвольной сложности, осуществляемая путем замены выходных функций, предложена Пархоменко [25] (1964) и развита Горовым [26] (1967). Аппарат теории графов для функциональной декомпозиции в произвольном базисе использован Горбатовым [27] (1967), что послужило толчком для развития самой теории. Методы решения логических уравнений и их применение при декомпозиции разработаны Рудяну [28] (1974) и Закревским [29] (1975).

Исследование сложности представления булевых функций предпринято Шенноном [30] (1949), Яблонским [31] (1959) и Лупановым [32] (1963). Основной их результат: почти все функции реализуются со сложностью, близкой к максимальной. Более того, показано существование декомпозиции, удовлетворяющей найденным асимптотическим оценкам. Однако выдвинуто предположение о том, что нахождение минимальных декомпозиций сопряжено с полным или почти полным перебором возможных решений и осуществимо только для функций небольшой размерности.

Представимость функций со сложностью, не превышающей некоторую предельную, привело к развитию форм совместного описания систем дискретных функций. Хотя сложность синтезируемого выражения в этом случае максимальна, однако появляется возможность описать все функции сразу (одновременно). При этом базис расширяется и в него включаются многозначные (многоразрядные) операции. Среди результатов, полученных на этом направлении, следует отметить использование многозначной логики для представления булевых функций Враневичем, Ли и Смитом [33] (1970), совместное описание систем функций арифметическим полиномом

Малюгиным [34] (1982), векторную реализацию функций Лапкиным [35] (1983), представление кратных логических вычислений Малюгиным и Выхованцем [36] (1998).

В области декомпозиций многозначных функций получены аналогичные результаты. Полнота и замкнутость исследована Яблонским [37] (1958), обобщение разделительной декомпозиции на многозначный случай выполнено Вилиузманом и Враневичем [38] (1970), минимизация рассмотрена Су и Ченгом [39] (1972). В свою очередь, метод декомпозиции, основанный на спектральном анализе, предложен Токменом [40] (1980), а полиномиальное разложение – Страздинсом [41] (1983).

Алгебраические представления многозначных функций связаны с именами Поста [43] (1921, расширение булевой алгебры), Веба [44] (1935, алгебра из одной операции), Берштейна [45] (1924, модулярная арифметика), Яблонского [37] (1958, алгебра литеральных операций), Коха [46] (1960, конечное поле), Тошича [47] (1972, кольцо модулярных операций), Мак-Класки [48] (1979, алгебра интервальных операций). Линейная независимость спектральных функций в ортогональных разложениях исследована Перковским [42] (1992).

Настоящая работа посвящена алгебраической декомпозиции дискретных функций в наиболее общем виде, когда переменные и функции принимают значения на произвольных конечных множествах, а выбор операций не ограничен каким-либо их подмножеством. Ставится задача синтеза оптимального формульного представления дискретной функции. Суть подхода заключается в объединении алгебраических методов, разделительной декомпозиции и ортогональных разложений в широком спектре алгебраических систем. После разделения переменных на два непересекающихся подмножества исходная функция разлагается по системе функций, зависящих от первого подмножества переменных, в результате чего получаются функции (коэффициенты разложения), зависящие от второго подмножества. После представления этих функций бесповторными бесскобочными формулами синтезируется формульное представление исходной функции. В качестве аналитической конструкции, используемой для получения верхних и нижних оценок сложности синтезируемых формул, применено спектральное разложение функции.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе вводятся основные понятия и даются необходимые определения. Третий раздел посвящен алгебраической декомпозиции и завершается постановкой задачи оптимального синтеза. Исследованию аналитических конструкций формул и их выразительных возможностей посвящен четвертый раздел. В пятом и шестом разделе рассмотрена соответственно спектральная и решающая декомпозиция, для которых обосновываются оценки сложности синтезируемых формул. В заключении дается содержательная интерпретация полученных результатов, делаются выводы и перечисляются нерешенные задачи.

2. Основные понятия и определения

Для дискретного кодирования данных выберем в качестве универсального множество целых чисел $N_0 = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$. Когда необходимо задать конечное множество из k элементов, будем использовать подмножество N_k этого множества, $N_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, где $k > 0$ – количество элементов в N_k.

2.1. Дискретная функция

Функция f одной переменной x, заданная на множестве N_k и принимающая значения на множестве N_{k_f}, есть отображение N_k в N_{k_f} такое, что каждый элемент x области определения N_k связан (соответствует) не более чем с одним элементом $y = f(x)$ области значений N_{k_f}. Число k назовем *значностью переменной*, а k_f – *значностью функции*. Функция является *дискретной*, если ее область определения и область значений – конечные множества.

Пусть функция f задана на множестве $N_k = N_{k_0} \times N_{k_1} \times \ldots \times N_{k_{n-1}}$ и принимает значения на множестве N_{k_f}, где $\times$ – декартово произведение множеств. В этом случае функция зависит от n переменных x_0, x_1, …, x_{n-1} со значностями k_0, k_1, …, k_{n-1} соответственно, т.е. $y = f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, где $y \in N_{k_f}$, а $x_j \in N_{k_j}$ ($j = \overline{0, n-1}$).

Произвольная дискретная функция f задается вектором значений $\mathbf{F} = [f_0\ f_1 \ldots f_{m-1}]$ длины m и вектором значностей переменных $\mathbf{K} = [k_0\ \ k_1 \ldots\ k_{n-1}]$ длины n, $m = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$, где для обозначения векторов использованы квадратные скобки. Если функция задана только вектором $\mathbf{F}$, то существует множество векторов $\mathbf{K}$, которые могут быть использованы для доопределения функции. Количество таких векторов равно количеству представлений числа m в виде произведения целых чисел, больших единицы. Функцию, заданную только вектором значений длины m, будем называть m*-функцией*.

2.2. Системы счисления

Установим взаимно однозначное соответствие между значением переменной $x \in N_m$ и значениями переменных $x_j \in N_{k_j}$ путем представления числа x в n-разрядной позиционной системе счисления с основаниями, определяемыми значностями переменных.

Представлением числа x в n-разрядной *позиционной системе счисления* с основаниями k_0, k_1, …, k_{n-1} называется упорядоченное множество из n чисел или цифр $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})_{k_0\, k_1 \ldots k_{n-1}}$ таких, что

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j w_j , \quad w_j = \prod_{t=0}^{j-1} k_t ,$$

где $x_j \in \{0, 1, \ldots, k_j - 1\}$ – j-я цифра числа x с весом w_j, причем цифра x_0 имеет наименьший вес w_0, равный единице.

Для прямого и обратного преобразования числа x в его представление в системе счисления с различными основаниями цифр $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})_{k_0\, k_1 \ldots k_{n-1}}$ используются следующие рекуррентные правила:

(1) $$x(0) = x , \qquad \left.\begin{array}{r} x_t = x(t) \ \mathrm{mod}\ k_t \\ x(t+1) = x(t) \ \mathrm{div}\ k_t \end{array}\right\} \ (t = \overline{0, n-2}), \qquad x_{n-1} = x(n-1) ;$$

(2) $$x(n-1) = x_{n-1} , \qquad x(t-1) = x(t)\, k_{t-1} + x_{t-1} \ \ (t = \overline{n-1, 1}), \qquad x = x(0) ,$$

где $x(t)$ – временная переменная, изменяющая свое значение на каждой итерации t, mod обозначает остаток, а div – целую часть от деления первого операнда на второй.

Пусть функция, заданная вектором $\mathbf{F}$. Тогда выражение $\mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ равно значению функции, когда переменные принимают значения x_0, x_1, …, x_{n-1}. Возможна также запись вида

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})_{k_0\, k_1 \ldots k_{n-1}} ,$$

если переменная x представлена в позиционной системе счисления с основаниями $\mathbf{K}$, а $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ читается как последовательность цифр числа x в этой системе счисления, причем в этой записи первая цифра имеет наименьший вес.

2.3. Дискретная операция

Операцией называется функция, существенно зависящая от своих переменных. Местность операции определяется числом операндов (переменных), участвующих в формировании результата операции. Очевидно, если результат r-местной операции не зависит от одного из операндов, такую операцию следует рассматривать как $(r-1)$-местную.

Унарная (одноместная) операция может быть определена вектором, а бинарная (двуместная) – матрицей. Вектор $[y_0\, y_1 \ldots y_{k_0-1}]$ длины k_0, обозначаемый также как $[y_i \mid i=\overline{0,k_0-1}]$ или $[y_i]$, задает унарную операцию, а единственный операнд этой операции имеет значность k_0. Матрица размерности $k_0 \times k_1$, обозначаемая как $[y_{ij} \mid i=\overline{0,k_0-1},\, j=\overline{0,k_1-1}]$ или $[y_{ij}]$, является матрицей бинарной операции, если она содержит хотя бы одну строку (столбец), отличную от остальных строк (столбцов). В этом случае первый операнд имеет значность k_0, а второй – k_1.

Пусть унарная операция $\neg$ и бинарная операции $\circ$ заданы вектором $[y_i]$ и матрицей $[y_{ij}]$. Обозначим применение унарной операции $\neg$ к переменной x как $\neg\, x=[y_i](x)=y_x$, а бинарной операции $\circ$ к переменным x и z как $x \circ z=[y_{ij}](x,z)=x\,[y_{ij}]\,z=y_{xz}$.

2.4. Декомпозиция функций

Под *декомпозицией дискретной функции* будем понимать представление функции формулой, связывающей переменные и операции над ними со значением функции.

Универсальной декомпозиционной схемой, используемой для всех видов декомпозиции, является представление некоторой функции f в виде композиции функций Σ и a_j ($j=\overline{1,m}$, $m \ge 1$):

$$f(X)=\Sigma(X', a_1(X''), a_2(X''), \ldots, a_m(X'')),$$

где X' и X'' – подмножества переменных, получаемые в результате разделения множества X.

При *разделении* множество $X=\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ разбивается на два подмножества $X'=\{x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n'-1}\}$ и $X''=\{x''_0, x''_1, \ldots, x''_{n''-1}\}$ с числом переменных n' и n''. Если $X' \cap X'' \ne \varnothing$, то декомпозиция называется *пересекающаяся*, в противноймслучае – *непересекающейся*.

Известны два крайних подхода к декомпозиции функций. В первом случае входные переменные преобразуются в значение функции на основе неалгебраических представлений. Второй подход основан на представлении функции в регулярных или алгебраических формах (табл. 1).

Таблица 1. Декомпозиции дискретных функций

Декомпозиция	Конструкция	Переменные
Пересекающаяся	$f(X)=\Sigma(X', a(X''))$	$X' \cup X'' = X$ $X' \cap X'' \neq \varnothing$
Разделительная	$f(X)=\Sigma(X', a(X''))$	$X' \cup X'' = X$ $X' \cap X'' = \varnothing$
Кратная	$f(X)=\Sigma(X', a_1(X''), a_2(X''), \ldots, a_m(X''))$	$X' \cup X'' = X$ $X' \cap X'' = \varnothing$
Промежуточная	$f(X)=\Sigma(\theta_1(X', a_1(X'')),\ \ldots, \theta_m(X', a_m(X'')))$	$X' \cup X'' = X$ $X' \cap X'' = \varnothing$
Решающая	$f(X)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(X')\times a_i(X'')$	$X' \cup X'' = X$ $X' \cap X'' = \varnothing$
Спектральная	$f(X)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(X')\times a_i(X'')=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(X)\times a_i$	$X' = X$ $X'' = \varnothing$

Пересекающаяся [49], разделительная [7, 9, 23] и кратная [12] декомпозиции относятся к классу неалгебраических. Решающая [50] и спектральная [21, 22] декомпозиции выполняются в некоторой алгебре с двумя бинарными операциями и относятся к классу алгебраических. В свою очередь, промежуточная декомпозиция [51] является прообразом алгебраической и расположена между алгебраическими и неалгебраическими видами.

Рассмотрим особенности табличного представления функций при разделении ее переменных на два непустых непересекающихся подмножества X' и X''. Определим значности подмножеств X' и X'' так:

$$k' = \prod_{(x_j \in X')} k_j = \prod_{j=0}^{n'-1} k'_j\,, \quad k'' = \prod_{(x_j \in X'')} k_j = \prod_{j=0}^{n''-1} k''_j\,.$$

Это позволяет рассматривать функцию как зависящую от двух обобщенных переменных x' и x'' со значностями k' и k'' соответственно, где $k'k'' = m$.

Пример 1. Пусть функция определена векторами

$$\mathbf{F} = [3\,2\,2\,1\,0\,2\,3\,1\,2\,0\,1\,3\,1\,0\,3\,2\,2\,0\,0\,2\,0\,2\,2\,0\,],\quad \mathbf{K} = [2\,2\,3\,2],$$

т.е. зависит от переменных $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ со значностями $k_0 = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ и $k_3 = 2$. Разобьем переменные на два подмножества $X' = \{x_1, x_3\}$ и $X'' = \{x_0, x_2\}$. Тогда $k' = k_1 k_3 = 4$ и $k'' = k_0 k_2 = 6$. Переопределим функцию в виде двумерной таблицы (табл. 2).

Автоматика и телемеханика. 2006. № 3. С. 20-56.

Таблица 2. Двумерная таблица функции

		x_0	0	1	0	1	0	1
		x_2	0	0	1	1	2	2
x_1	x_3	$x' \setminus x''$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	3	2	0	2	2	1
1	0	1	2	1	3	1	0	3
0	1	2	1	0	2	0	0	2
1	1	3	3	2	0	2	2	0

При построении таблицы пересчет переменной $x \in N_{24}$ в переменные $x' \in N_4$ и $x'' \in N_6$ производился с использованием системы счисления с основаниями $\mathbf{K}' = [2\,2]$ и $\mathbf{K}'' = [2\,3]$ так,

$$\mathbf{F}(x)_{24} = \mathbf{F}(x_0, x_1, x_2, x_3)_{2\,2\,3\,2} = \mathbf{T}[(x_0, x_2)_{2\,2} \ \ (x_1, x_3)_{2\,3}] = \mathbf{T}[c\,r] = t_{r\,c},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица функции (двумерная таблица), $t_{r\,c}$ – элемент этой матрицы, а r (c) – ее строка (столбец). В частности,

$$t_{2\,3} = \mathbf{T}[3\,2] = \mathbf{T}[(1,1)_{2\,2} \ \ (0,1)_{2\,3}] = \mathbf{F}(1,0,1,1)_{2\,2\,3\,2} = \mathbf{F}(17) = 0. \ \blacksquare$$

Количество способов, которыми множество из n элементов может быть разделено на два непересекающихся подмножества, очевидно, равно $2^{n-1} - 1$.

При построении двумерной таблицы используются рекуррентные формулы (1) и (2), для которых необходима некоторая упорядоченность переменных в множествах X' и X''. Перестановка переменных x'_i и x'_j из множества X' при фиксированном порядке переменных из множества X'' приводит к перестановке строк результирующей таблицы, так как каждое число $x' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n'-1})$ или номер строки имеет уже другое значение при неизменных цифрах (значениях переменных), его составляющих. Аналогично перестановка переменных из множества X'' порождает перестановку столбцов в двумерной таблице функции.

Таким образом, изменение порядка переменных в множествах X' и X'' приводит соответственно к перестановке строк и столбцов двумерной таблицы функции. Более того, для алгебраической декомпозиции сохраняется линейная зависимость (линейная независимость) строк и столбцов двумерной таблицы функции, если она имела место до перестановки.

Пример 2. Покажем, как изменится двумерная таблица функции из примера 1 при перестановке переменных x_0 и x_2 из множества X'' (табл. 3). Из сравнения табл. 2 и табл. 3 видно, что перестановка переменных привела к перестановке столбцов. ■

Таблица 3. Перестановка переменных

		x_2	0	1	2	0	1	2
		x_0	0	0	0	1	1	1
x_1	x_3	$x'\backslash x''$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	3	0	2	2	2	1
1	0	1	2	3	0	1	1	3
0	1	2	1	2	0	0	0	2
1	1	3	3	0	2	2	2	0

3. Алгебраическая декомпозиция

Решающая и спектральная декомпозиции являются алгебраическими и выполняются в некоторой алгебраической системе, образованной двумя операциями – сложением и умножением.

При алгебраической декомпозиции произвольная m-функция значности $k_f \le k$ представляется разложением по некоторой системе k'-функций θ_i $(i = \overline{0, k'-1})$,

(3) $$f(X) = \sum_{i=0}^{k'-1} \theta_i(X') \times a_i(X''),$$

где a_i – *коэффициенты* разложения, некоторые k''-функции. Функции θ_i будем называть *спектральными*.

Найдем условия, при которых разложение (3) существует.

3.1. Образующие алгебры

Пусть имеется алгебра $R = \langle N_k, +, \times \rangle$, заданная на множестве N_k двумя бинарными операциями, условно называемыми сложением $+$ и умножением $\times$. При $k = 0$ алгебра определена на счетном множестве N_0, в противном случае – на конечном множестве из k элементов.

Исследуем такие алгебры R, в которых разложение (3) возможно. Для этого операции сложения и умножения выберем таким образом, чтобы для заданной системы спектральных функций θ_i система линейных уравнений

(4) $$\sum_{i=0}^{k'-1} d_{ji} \times a_i(X'') = f_j(X'') \quad (j = \overline{0, k'-1})$$

имела единственное решение относительно неизвестных функций-коэффициентов $a_i(X'')$, где $d_{ji} = \theta_i(j)$. Такие алгебры будем называть *образующими*[1].

В матричном виде разложение (3) представляется так:

(5) $$\mathbf{T} = \mathbf{D} \times \mathbf{A} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{Q} \times \mathbf{T}),$$

где $\mathbf{T}$ ($\mathbf{A}$) – матрица функции (коэффициентов разложения) размерности $k' \times k''$, $\mathbf{D}$ ($\mathbf{Q}$) – матрица прямого (обратного) преобразования размерности $k' \times k'$ с элементами $d_{ji} = \theta_i(j)$ $(q_{ij} = \vartheta_j(i))$. Заметим, что столбцы матрицы $\mathbf{D}$ являются векторами спектральных функций θ_i.

Существуют четыре типа образующих алгебр (табл. 4), которые порождают соответственно четыре класса спектральных функций. Чтобы пояснить различия между образующими алгебрами введем несколько дополнительных определений и дадим расширенную интерпретацию результатов, полученных ранее в [50].

Таблица 4. Образующие алгебры

Класс функций	Двузначные	Многозначные
Унимодальные	Алгебры логики	Мультипликативные алгебры
Мультимодальные	Аддитивные алгебры	Фундаментальные алгебры

Элемент a называется *инвертирующим* (слева и справа) на множестве $N_a \subseteq N_k$, если уравнения $a + x = b$ и $x + a = b$ имеют единственные решения относительно $x \in N_k$ для всех $b \in N_a$. Очевидно, что для каждого элемента a может быть найдено его инвертирующее множество N_a, которое может быть пустым.

Аналогично, элемент a называется *обращающим* (слева) на множестве N_a, если уравнение $a \times x = b$ имеет единственное решение относительно x для всех $b \in N_a$.

Элемент a называется *вырожденным* (слева) на множестве N_a, если элемент $x = a \times b$ может быть найден (выражен, определен) при любом наперед неизвестном $b \in N_a$. Такие элементы b назовем *свободными*. В частном случае вырожденный элемент

[1] Известно, что разложение произвольной функции в виде (3) возможно в полях и целостных кольцах (коммутативных кольцах с единицей и без делителей нуля). Следовательно, перечисленные алгебры являются образующими.

a называется *нейтральным*, если $a \times b = b$, *константным* – если $a \times b = c$ и c не зависит от b, *нулеобразующим* – если $a \times b = 0$ для всех b, и т.д.

Элемент a называется *неделимым* (слева) на множестве N_a, если уравнение $a = b \times x$ не имеет решений относительно x при любых $b \in N_a$.

Пример 3. Поясним введенные определения на примере операций, заданных на множестве N_4 матрицами (таблицами Кэли):

$$+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \times = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

Относительно операции сложения все элементы множества N_4 являются инвертирующими слева (справа) на множестве N_4, так как уравнение $a + x = b$ ($x + a = b$) имеет единственные решения для всех $x \in N_4$, что видно из матрицы сложения, которая не имеет повторяющихся элементов в каждой своей строке (столбце).

Относительно операции умножения элементы $a \in \{1, 2, 3\}$ являются обращающими слева (справа) на множестве $\{1, 2, 3\}$, так как уравнение $a \times x = b$ ($x \times a = b$) имеет единственные решения для всех $x \in \{1, 2, 3\}$, что также видно из матрицы операции.

Относительно операции умножения элементы 0 являются вырожденным слева (справа) на множестве N_4, так как $0 \times x = 0$ ($x \times 0 = 0$) для всех $x \in N_4$. В свою очередь элемент 1 вырожден на множестве $\{1, 2, 3\}$ иным образом: $1 \times x = x$ ($x \times 1 = x$). В рассматриваемом примере элемент 0 нулеобразующий, а 1 – нейтральный.

И, наконец, элемент 0 является неделимыми слева (справа) на множестве $\{1, 2, 3\}$, так как уравнение $a = b \times x$ ($a = x \times b$) не имеет решения относительно x при любых $b \in \{1, 2, 3\}$. Последнее видно из матрицы умножения, которая не содержит элемента 0 в позициях с номерами строк (столбцов) 1, 2, 3. ■

В табл. 5 определены сигнатуры образующих алгебр, где знаком \ обозначена операция разности множеств, а при отсутствии указания на множества, на которых элементы являются инвертирующими, обращающими, вырожденными или неделимыми, подразумевается все множество N_k – носитель образующей алгебры. В свою очередь отношения между алгебрами показаны на рис. 1.

Таблица 5. Сигнатуры образующих алгебр

<table>
<tr><th>Алгебра</th><th>Операция сложения</th><th>Операция умножения</th></tr>
<tr><td>Логики R_L</td><td rowspan="2">$\sigma+\sigma=\sigma$,
σ – инвертирующий</td><td>ϕ – вырожденный ($\phi\times a=\sigma$),
τ – обращающий</td></tr>
<tr><td>Мультипликативная R_M</td><td>ϕ – вырожденный ($\phi\times a=\sigma$),
$N_k\setminus\sigma$ – обращающие</td></tr>
<tr><td>Аддитивная R_A</td><td rowspan="2">$\sigma+\sigma=\sigma$,
N_k – инвертирующие,
ассоциативность,
коммутативность</td><td>ϕ – вырожденный,
τ ($-\tau$) – обращающий</td></tr>
<tr><td>Фундаментальная R_F</td><td>ϕ – неделимый на $N_k\setminus\sigma$,
ассоциативность, коммутативность,
дистрибутивность по сложению</td></tr>
</table>

Из табл. 5 находим, что операция сложения в аддитивной и фундаментальной алгебрах образует коммутативную (абелеву) группу на множестве N_k с нейтральным элементом σ, называемым *нулем*. Фундаментальная алгебра, в свою очередь, включает поле ($k>0$) или коммутативное кольцо без делителей нуля ($k=0$). В фундаментальной алгебре элемент τ становится нейтральным по умножению или *единицей*, а ϕ совпадает с σ – нейтральным элементом по сложению. В остальных алгебрах элементы ϕ и σ могут различаться.

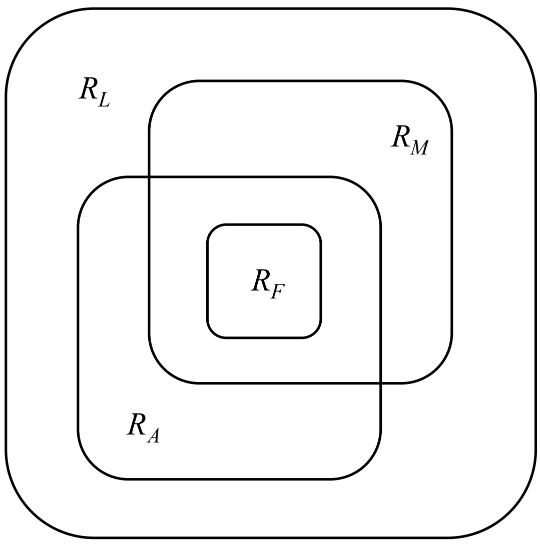

Рис. 1. Классы образующих алгебр

В аддитивной алгебре возможно различное вырождение элементов ϕ и τ, но в любом случае требуется, чтобы хотя бы одно вырождение существенным образом зависело от свободного элемента. Частным случаем аддитивной алгебры являются униполярная и биполярная алгебры. *Униполярная* алгебра имеет традиционное вырождение элементов: $\phi \times x = \sigma$ и $\tau \times x = \pm x$ при всех x. В *биполярной* алгебре помимо элементов ϕ и τ с вырождением соответсвенно $\phi \times x = \sigma$ и $\tau \times x = x$ используется вырожденный элемент $-\tau$, интерпретируемый следующим образом: $-\tau \times x = -x$.

Для существования матрицы **Q** и использования для ее получения матричного аппарата на операции образующих алгебр накладывают дополнительные ограничения. В алгебре логики элемент σ должен быть равен ϕ и являться нейтральным по сложению, а элемент τ – нейтральным по умножению. В мультипликативной алгебре умножение должно иметь обратную операцию на множестве $N_k \setminus \sigma$. В аддитивной адгебре вырождение элементов должно быть коммутативно. В фундаментальных алгебрах в дополнительных требованиях нет необходимости.

Доказательство основных фактов, перечисленных выше, можно найти в работе [50].

3.2. Спектральные функции

Для разрешимости системы уравнений (4) на коэффициенты d_{ji} должны быть наложены определенные ограничения.

В алгебре логики матрица прямого преобразования **D** является *матрицей перестановок*, в каждой строке и столбце которой имеется только один элемент, отличный от ϕ и равный τ.

В мультипликативной алгебре **D** должна быть *мономиальной матрицей*, содержащей в каждой строке и в каждом столбце по одному элементу, отличному от ϕ.

В аддитивной алгебре требуется, чтобы **D** была *биполярной матрицей*, состоящей из ϕ (нуля), τ (единицы) и $-\tau$ (минус единицы) с ненулевым определителем, по модулю меньшим циклического порядка группы по сложению.

В фундаментальных алгебрах **D** должна быть *обращаемой* (в конечном поле) или иметь *определитель, отличный от нуля* (в коммутативном кольце без делителей нуля).

Классы спектральных функций, порождаемые образующими алгебрами, находятся в отношении включения друг в друга (рис. 2). Самый обширный класс S_F представлен мультимодальными многозначными функциями и включает в себя два пересекающихся класса: класс мультимодальных двузначных функций S_A и класс унимодальных многозначных функций S_M. Пересечение последних образует класс унимодальных двузначных функций S_L.

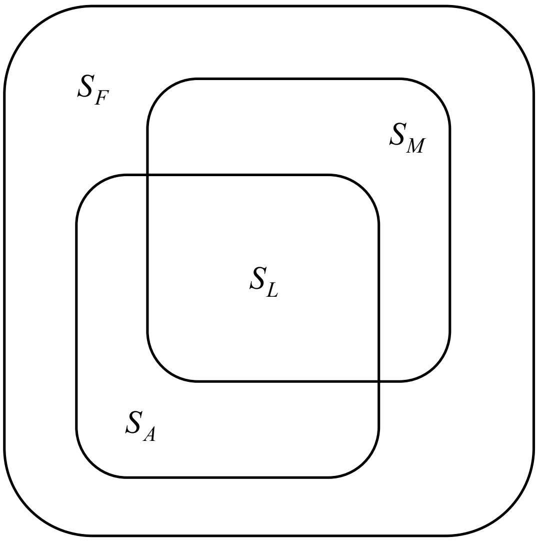

Рис. 2. Классы спектральных функций

Унимодальной называется функция, принимающая значения, отличные от нулеобразующего элемента ϕ, только в одной точке области определения. Если это значение единственное, то эта функция унимодальная двузначная, в противном случае – унимодальная многозначная.

К *мультимодальным* относятся функции, имеющие произвольные значения в любой точке области определения. Если множество значений включает только два элемента, то такая функция называется двузначной, если более двух – то многозначной.

В свою очередь, мультимодальные функции разделяются на два подкласса – *униполярные мультимодальные* (собственно мультимодальные) и *биполярные мультимодальные* (бимодальные), которые получаются при униполярном и биполярном вырождении элементов. Бимодальные функции используются для декомпозиции в биполярной аддитивной алгебре, а также на коммутативном кольце без делителей нуля, а униполярные – в униполярной алгебре и конечном поле.

Типичные представители распространенных на практике систем приведены в табл. 6. В классе унимодальных используются следующие функции: дизъюнктивные [1], конъюнктивные [4], литеральные [37] и интервальные [48]. Из мультимодальных применяются функции Жегалкина [2], Рида-Малера [10, 11], теоретико-числовые [52, 53] и полиномиальные [54]. Бимодальные функции представлены функциями Радемахера [55], Уолша [56], Хаара [57] и Виленкина-Крестенсона [58, 59].

Таблица 6. Системы спектральных функций

Класс функций	Двузначные	Многозначные
Унимодальные	Дизъюнктивная Конъюнктивная	Литеральная Интервальная
Мультимодальные	Жегалкина Рида-Маллера	Теоретико-числовые Полиномиальные
Бимодальные	Радемахера Уолша	Хаара Виленкина-Крестенсона

3.3. Функциональная полнота

Как показано выше, существуют четыре типа *базисов*, одноименных образующим их алгебрам: логический, мультипликативный, аддитивный и фундаментальный, где под базисом понимается совокупность образующей алгебры и соответствующей ей системы спектральных функций.

Система спектральных функций в любом из базисов является *фундаментальной*, т.е. сложение и умножение функций коммутативно, ассоциативно и выполняется закон дистрибутивности умножения функций относительно их сложения. Так, для произвольных функций θ_s, θ_t и θ_u при всех возможных значениях их переменных x, y и z имеем

$$\begin{aligned}
\theta_s(x)*\theta_t(y) &= \theta_t(x)*\theta_u(y),\\
\{\theta_s(x)*\theta_t(y)\}*\theta_u(z) &= \theta_s(x)*\{\theta_t(y)*\theta_u(z)\},\\
\theta_s(x)\times\{\theta_t(y)+\theta_u(z)\} &= \{\theta_s(x)\times\theta_t(y)\}+\{\theta_s(x)\times\theta_u(z)\},
\end{aligned}$$

где $*$ – знак операции сложения или умножения.

Разложение (3) позволяет произвольную m-функцию представить формулой, в которой функции θ_i и a_i имеют меньшую сложность, чем исходная, а спектральный базис $\langle R, \{\theta_i\}, \{a_i\}\rangle$, где R – образующая алгеба, $\{\theta_i\}$ – фиксированное множество k'-функций, а $\{a_i\}$ – множество всех k''-функции, обладает функциональной полнотой. В частном случае, когда $k''=1$, имеем спектральное разложении функции, у которого множество $\{a_i\}$ вырождается в константы.

3.4. Синтез формул

Традиционно синтез формул для спектральных функции не производится, в разложение подставляются уже готовые выражения, известные для небольшого числа базисов. Для каждой такой системы дается символьное обозначение спектральных функций, и приводятся аналитические выражения, определяющее эти функции через другую известную систему или виде формул в некотором базисе операций. В последнем случае используются операции, которые позволяют наиболее просто выразить спектральные функции в аналитической форме. Иногда для упрощения выражений вводятся специальные операции, которые не использовались ранее.

Покажем на примере традиционный синтез формульного представления функции, который осуществим в униполярной аддитивной алгебре.

Пример 4. Пусть операции сложения и умножения R_A заданы матрицами

$$+=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{bmatrix},\quad \times=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

где + – сумма по модулю 4, образующая абелеву группу на множестве N_4 с нулем $\sigma=0$, а × – операция логического сдвига ($a\times b$ есть сдвиг b на a двоичных разрядов влево) с левыми нулеобразующими элементами $\phi\in\{2,3\}$ ($\phi\times a=0$ для всех $a\in N_4$) и левым обращающим элементом $\tau=0$ ($\tau\times a=a$ для всех $a\in N_4$). Циклический порядок группы по сложению равен 2, так как $a+a=\sigma$ при $a=2$. Из матрицы сложения также находим противоположные элементы: $-0=0$, $-1=3$, $-2=2$, $-3=1$.

Рассмотрим функцию из примера 1 при разделении переменных $X'=\{x_1,x_3\}$ и $X''=\{x_0,x_2\}$. Запишем ее разложение по некоторой системе спектральных функций

$$f(X)=\theta_0(X')\times a_0(X'')+\theta_1(X')\times a_1(X'')+\theta_2(X')\times a_2(X'')+\theta_3(X')\times a_3(X'').$$

Зададим систему спектральных функций логической матрицей $\mathbf{D}$ и найдем в кольце целых чисел определитель Δ и алгебраические дополнения $\overline{\mathbf{D}}$ сопряженной ей матрицы $\widetilde{\mathbf{D}}$, получаемой из $\mathbf{D}$ заменой τ на единицу, $-\tau$ на минус единицу, а ϕ на нуль кольца целых чисел:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\tau&\phi&\phi&\phi\\\tau&\tau&\phi&\phi\\\tau&\phi&\tau&\phi\\\tau&\phi&\phi&\tau\end{bmatrix},\quad \widetilde{\mathbf{D}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\quad \Delta=1,\quad \overline{\mathbf{D}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Циклический порядок группы больше Δ. Следовательно, система функций $\mathbf{D}$ обеспечивает функциональную полноту базиса в алгебре R_A. Тогда

$$\Delta \cdot \mathbf{A} = \overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\cdot$ – операция *циклической суммы*, определяемая как $n \cdot a = a + a + \ldots + a$ (n раз), причем $(-n) \cdot a = n \cdot (-a)$ и $0 \cdot a = \sigma$, $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов, $\mathbf{T}$ – двумерная таблица функции (табл. 2).

Умножая матрицы $\overline{\mathbf{D}}$ и $\mathbf{T}$ относительно операции сложения и циклической суммы, находим $\Delta \cdot \mathbf{A}$, а затем и $\mathbf{A}$ путем решения системы уравнений $\Delta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$, где $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{T}$,

$$\Delta \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом случае $\Delta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, так как $\Delta = 1$. В итоге имеем

$$f(X) = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau \\ \tau \\ \tau \end{bmatrix}(X') \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}(X'') + \begin{bmatrix} \phi \\ \tau \\ \phi \\ \phi \end{bmatrix}(X') \times \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}(X'') + \begin{bmatrix} \phi \\ \phi \\ \tau \\ \phi \end{bmatrix}(X') \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}(X'') + \begin{bmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \\ \tau \end{bmatrix}(X') \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(X'')$$

и после тождественных преобразований получим

$$f(X) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}(X'') + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}(X') \times 3 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}(X') \times 2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}(X') \times 0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x_0, x_2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x_1, x_3).$$

Теперь представим функции, присутствующие в выражении и зависящие от двух переменных, в виде операций $\circ_0$ и $\circ_1$,

$$f(X) = x_0 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} x_2 + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} x_3 = x_0 \circ_0 x_2 + x_1 \circ_1 x_3. \ \blacksquare$$

Из примера 4 видно, что при решающей декомпозиции по виду таблицы функции можно оценить эффективность ее формульного представления. Представление более компактно, если при прочих равных условиях матрица $\mathbf{T}$ содержит большее число одинаковых или линейно зависимых строк. Очевидно, определение линейной зависимости осуществляется в каждой из образующих алгебр по-разному.

3.5. Оптимальный синтез

Для сравнения различных декомпозиционных схем введем количественные характеристики, определяющие эффективность получаемых представлений. Для этого рассмотрим разложение (3), у которого множество переменных X разделено на два непересекающихся множества X' и X'' с числом элементов n' и n'',

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1}\theta_i(X')\times a_i(X''), \tag{6}$$

где исключены выражения вида $\phi\times a_i(X'')=\sigma$, M – количество слагаемых, $M\le k'$.

Сложность разложения функции определим количеством слагаемых M. Очевидно, чем меньше сложность разложения, тем более эффективна декомпозиция. Под *сложностью представления* L будем понимать количество операций, необходимых для вычисления функции по ее формуле.

Рассмотрим разложение (6), записанное в матричном виде, $\mathbf{D}\times\mathbf{A}=\mathbf{T}$, где размерность матрицы $\mathbf{D}$ равна $k'\times k'$, а матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{T}$ – $k'\times k''$ (рис. 3). Видно, что количество членов разложения, необходимое для представления произвольной функции, не может превосходить k''. Последнее следует из фундаментальности спектральных функций. Действительно, если выбрать в качестве базисных k'' линейно независимых строк матрицы функции, то только $k'-k''$ строк можно представить в виде линейных комбинаций базисных, а соответствующие коэффициенты обнулить.

$$\left[\begin{array}{cccc:cc}\tau&\phi&\phi&\phi&\phi&\phi\\ \phi&\tau&\phi&\phi&\phi&\phi\\ \phi&\phi&\tau&\phi&\phi&\phi\\ \phi&\phi&\phi&\tau&\phi&\phi\\ \hdashline *&*&*&*&\tau&\phi\\ *&*&*&*&\phi&\tau\end{array}\right]\times\left[\begin{array}{cccc}+&+&+&+\\ +&+&+&+\\ +&+&+&+\\ +&+&+&+\\ \hdashline \phi&\phi&\phi&\phi\\ \phi&\phi&\phi&\phi\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}+&+&+&+\\ +&+&+&+\\ +&+&+&+\\ +&+&+&+\\ \hdashline \sim&\sim&\sim&\sim\\ \sim&\sim&\sim&\sim\end{array}\right]$$

Рис. 3. Решающая декомпозиция: τ – единица алгебры; ϕ – нулеобразующий элемент; $*$ – свободные элементы; $+$ – элементы линейно независимых строк; $\sim$ – элементы линейно зависимых строк

Очевидно, сложность разложения функции не будет зависеть от выбора линейно независимых строк, и найти разложение с меньшей сложностью, чем число линейно независимых строк в матрице функции не представляется возможным. В свою очередь, перестановка переменных внутри множеств не влияет на линейную зависимость строк (столбцов), следовательно, разделение переменных следует выполнять с точностью до их порядка.

Из приведенных рассуждений видно, что алгебраическая декомпозиция функции близка преобразованию Карунена-Лоэва [60, с. 182], в котором разложение осуществляется по собственным векторам ковариационной матрицы функции и тем самым обеспечивается наилучшее (оптимальное) приближение функции в среднеквадратическом смысле. Однако в отличие от преобразования Карунена-Лоэва на практике возникает необходимость в минимизации не только сложности разложения, но и сложности представления функции. Поэтому поставим задачу синтеза формульных представлений функций с наименьшей сложностью. Заметим, что при разложении по Карунену-Лоэву такая задача не ставится.

При оптимальном разложении по Карунену-Лоэву спектральные функции вычисляются с некоторой степенью свободы, а количество этих функций равно числу ненулевых собственных значений. В итоге преобразование Карунена-Лоэва гарантирует получение разложения функции с наименьшей сложностью. Воспользуемся имеющимися степенями свободы в задании спектральных функций путем выбора такого их подмножества, которое при минимальной сложности разложения обеспечивает и минимальную сложностью представления функции.

4. Аналитические конструкции формул

Исследуем возможные аналитические конструкции формул для спектральных функций в базисе унарных и бинарных операций и выявим их свойства, существенные при синтезе формул, как функций-коэффициентов, так и спектральных функций.

4.1. Классы формул

Очевидно, что произвольная формула может характеризоваться количеством переменных и количеством операций, из которых она состоит. Это количественные характеристики формулы. К качественным характеристикам отнесем наличие скобок, изменяющих естественный порядок вычисления, и повторную входимость переменных.

По входимости переменных все формулы будем разделять на *повторные*, у которых одна и та же переменная может присутствовать более одного раза, и *бесповторные*, когда каждая переменная встречается один раз или не встречается ни разу.

Под *бесскобочными* формулами будем понимать такие формулы, в которых операции над переменными выполняются слева направо в естественном порядке их записи при приоритете унарных операций над бинарными. В таких формулах скобки могут быть опущены.

В *скобочных* формулах порядок вычислений отличается от естественного. Это приводит к необходимости сохранять промежуточные результаты вычисления всех или части подформул, заключенных в скобки.

Таким образом, следует различать четыре класса формул: повторные скобочные, повторные бесскобочные, бесповторные скобочные и бесповторные бесскобочные. Рассмотрим особенности использования при алгебраической декомпозиции формул из различных классов.

4.2. Повторная входимость

Необходимость разделения формул на повторные и бесповторные вызвана тем, что от этого существенным образом зависит сложность их программной или аппаратурной реализации.

При аппаратурной реализации бесповторных формул трассировка данных от места хранения переменной до места ее обработки осуществляется к единственному входу логического элемента. В то время как для повторных формул такая трассировка требуется ко многим элементам.

При программной реализации повторные формулы приводят к многократному обращению к ячейкам памяти, где хранятся переменные. Вычисление же бесповторной формулы приводит к единственной выборке данных из входных ячеек.

При алгебраической декомпозиции имеется возможность выбора как различных образующих алгебр, так и спектральных функций, в том числе и с несущественной зависимостью от части переменных. Последнее позволяет синтезировать формулы как с повторными вхождениями переменных, так и с отсутствием вхождения всех или части переменных.

Следовательно, вхождение в аналитическую конструкцию спектральных функций одной и той же переменной более одного раза приводит к принципиальной неотличимости синтезируемых формул от выражений, получаемых в результате алгебраической декомпозиции. Если разрешить повторные вхождения переменных, то для представления спектральных функций и функций-коэффициентов в виде формул необходим такой же или более общий аппарат функциональной декомпозиции. Это приводит к невозможности завершить декомпозицию, если, конечно, формулы не заданы заранее.

Таким образом, повторные вхождения переменных в аналитическую конструкцию формул не только не улучшают выразительные свойства алгебраической декомпозиции, но и приводят к некоторой избыточности. Не нарушая общности, потребуем отсутствия повторных вхождений одной и той же переменной в аналитические конструкции спектральных функций и функций-коэффициентов.

4.3. Расстановка скобок

При реализации скобочных формул порядок вычислений отличается от естественного. Это приводит к необходимости сохранять промежуточные результаты вычисления всех или части подформул, заключенных в скобки.

Аппаратурная реализация бесскобочных формул осуществляется в виде каскадных (линейных) схем, в то время как реализация скобочных формул приводит к схеме общего вида. В свою очередь, вычисление скобочных формул требует использования промежуточных ячеек памяти. В противоположность этому бесскобочная форма может быть вычислена сразу, без сохранения промежуточных результатов.

Исследуем возможность использования при алгебраической декомпозиции бесповторных формул с различной расстановкой скобок. Рассмотрим наиболее общую бесповторную аналитическую конструкцию, заданную с точностью до расстановки скобок и порядка вхождения переменных,

(7) $$\theta(X) = \neg_0 x_{i_0} \circ_0 \neg_1 x_{i_1} \circ_1 \ldots \circ_{n-2} \neg_{n-1} x_{i_{n-1}},$$

где $\neg_j$ ($\circ_j$) – произвольные унарные (бинарные) операции, x_{i_j} – переменные из множества X. Как показано в [61], конструкция (7) будучи подвергнута тождественным преобразованиям, дает в результате конструкцию вида

(8) $$\theta_i(X) = x_{i_0} \circ_0 x_{i_1} \circ_1 x_{i_2} \circ_2 \ldots \circ_{n-2} x_{i_{n-1}},$$

также заданную с точностью до расстановки скобок, но уже не содержащую унарных операций.

Форму функции, не содержащую унарных операций будем называть *канонической*. Сравним выразительные возможности скобочных и бесскобочных аналитических конструкций, представленных в их канонической форме (8).

4.4. Бесскобочная конструкция

Подсчитаем количество различных функций N_θ, которые порождаются конструкцией (8) при естественном порядке ее вычисления. Будем предполагать, что левый операнд соединительных операций $\circ_j$ имеет значность предыдущей операции, а правый операнд – значность переменной $k_{i_{j+1}}$.

Для начала рассмотрим всевозможные бинарные операции от переменных со значностями k_0, k_1 и найдем количество порождаемых ими функций $N_o(k,k_0,k_1)$ значности k. Общее число функций, очевидно, равно $k^{k_0 k_1}$ и

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i N_o(i,k_0,k_1) = k^{k_0 k_1},$$

где множитель C_k^i – число сочетаний из k элементов по i, который учитывает функции значности i, принимающие значения не на всем множестве N_k, а на различных его подмножествах из i элементов. Отсюда получаем рекуррентное выражение для $N_o(k,k_0,k_1)$:

$$N_o(0,k_0,k_1) = 0, \quad N_o(k,k_0,k_1) = k^{k_0 k_1} - \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i N_o(i,k_0,k_1). \tag{9}$$

Аналогично получаем $N_o^{\rightarrow}(k,k_0,k_1)$ – количество функций значности k, порождаемых всевозможными бинарными операциями при их *более чем существенной зависимости* от левой переменной, т.е. когда матрицы операций не содержат одинаковых строк,

$$N_o^{\rightarrow}(1,k_0,k_1) = \begin{cases} k^{k_1}, & k_0 = 1; \\ 0, & k_0 > 1, \end{cases} \quad N_o^{\rightarrow}(k,k_0,k_1) = \prod_{i=0}^{k_0-1}(k^{k_1} - i) - \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i N_o^{\rightarrow}(i,k_0,k_1). \tag{10}$$

Рекуррентные формулы (9) и (10) позволяют вычислить количество бинарных операций при их некоторой фиксированной значности, равной k. Однако необходимо учесть, что конструкция (8) порождает функции, значность которых может изменяться от 1 до k.

Для подсчета количества различных функций N_θ со значностями от 1 до k, порождаемых конструкцией (8), имеем следующую систему рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} N_k(k_0,k_1) = N_o(k,k_0,k_1); \\ N_k(k_0,k_1,\ldots,k_t) = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{C_k^i}{i!} N_i(k_0,k_1,\ldots,k_{t-1}) N_o^{\rightarrow}(i,i,k_t) \quad (t = \overline{2,n-1}); \\ N_\theta(k,k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}) = \sum_{i=1}^{k} C_k^i N_\theta(i,k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}), \end{cases} \tag{11}$$

которая получена следующим образом.

Количество различных функций значности k двух переменных равно $N_k(k_0,k_1)$ $N_o(k,k_0,k_1)$ и определяется по формуле (9). Количество функций значности k от $t+1$ переменных $N_k(k_0,k_1,\dots,k_t)$ получаем как сумму количеств функций от t переменных значности i, умноженное на количество операций $N_o^{\rightarrow}(i,i,k_t)$, где i пробегает значения от 1 до k.

Все функции от t переменных порождают различные функции $t+1$ переменных. Однако каждая функция от $t+1$ переменных повторяется $i!$ раз, так как имеется $i!$ различных операций (по числу перестановок множества из i элементов), порождающих от различных функций t переменных одинаковые функции $t+1$ переменных.

Множитель C_k^i, как и ранее, учитывает функции значности i, принимающие значения не на всем множестве из k элементов, а на различных его подмножествах из i элементов.

Из приведенных выше рассуждений следует справедливость рекуррентных уравнений (11), которые позволяют вычислить количество различных функций $N_\theta(k,k_0,k_1,\dots,k_{n-1})$ со значностью, не превосходящей k, порождаемых канонической аналитической конструкцией бесповторных бесскобочных формул (8).

В табл. 7 приведены результаты вычисления количества функций значности k_f от n переменных, порождаемых аналитической конструкцией бесповторных бесскобочных формул в алгебре с числом элементов k, где значности переменных k_j равны значности алгебры.

Таблица 7. Количество бесповторных бесскобочных формул (в строке * приведено суммарное количество формул для функций со значностями от 1 до k)

k	k_f	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
2	1	1	1	1	1
	2	14	86	518	3110
	*	16	88	520	3112
3	1	1	1	1	1
	2	510	14282	399898	11197146
	3	18150	50082393	138078357192	380682064369779
	*	19683	50125242	138079556889	380682097961220
4	1	1	1	1	1
	2	65534	7864082	94368942	113242781042
	3	42850116	3584007294483	$2{,}99766372942\times10^{17}$	$2{,}50724594332\times10^{22}$
	4	4123173624	$6{,}93320208415\times10^{17}$	$1{,}16580823596\times10^{26}$	$1{,}96029022745\times10^{34}$
	*	4294967296	$6{,}93334544491\times10^{17}$	$1{,}16580824795\times10^{26}$	$1{,}96029022747\times10^{34}$

Вычисление рекуррентных уравнений (11) достаточно трудоемко, в связи с чем найдем нижнюю и верхнюю оценку количества бесповторных бесскобочных формул, порождающих различные функции. Из (9) и (10) следует

$$k^{k_0(k_1-1)} < N_o^{\rightarrow}(k,k_0,k_1) < N_o(k,k_0,k_1) < k^{k_0k_1},$$

и с учетом (11) получаем оценку для N_θ при $n>2$:

(12) $$k^{k_0k_1+(k-1)\sum\limits_{i=2}^{n-1}k_i} < N_\theta(k,k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}) < k^{k_0k_1+k\sum\limits_{i=2}^{n-1}k_i}.$$

Оценка (12) допускает достаточно простую содержательную интерпретацию. Верхняя граница степеней свободы канонической аналитической конструкции, приведенной на рис. 4, меньше суммарной площади операций (правая часть неравенства). В свою очередь, нижняя граница определяется при более чем существенной зависимости операций от левого операнда, что эквивалентно вычеркиванию одной строки у каждой операции, кроме нулевой (левая часть неравенства).

$$x_0\ \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \\ \circ_0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ \hline * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \\ \circ_1 \end{array} \cdots \begin{array}{c} x_{n-1} \\ \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ \hline * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \\ \circ_{n-2} \end{array} \rightarrow \theta(X)$$

Рис. 4. Бесскобочная аналитическая конструкция

Заметим одно немаловажное обстоятельство. Количество порождаемых векторов функций не зависит от порядка переменных, а определяются только их значностями. В свою очередь, порождающая способность канонической аналитической конструкции определяется значностями переменных и не зависит от их порядка, кроме первых двух, задающих размерность матрицы первой операции формулы.

4.5. Порождающая способность

Для упрощения формул вместо неравенств (12) будем использовать равенство

(13) $$N_\theta(k, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) = k^{k_0 k_1 + (k-\alpha)\sum_{i=2}^{n-1} k_i},$$

α – некоторый параметр, который назовем *порождающей способностью* аналитической конструкции, $0 < \alpha < 1$. Вычисление α осуществим по формуле

(14) $$\alpha = k - \frac{\log_k N_\theta - k_{i_0} k_{i_1}}{\sum_{j=2}^{n-1} k_{i_j}},$$

где k_{i_j} – значности переменных, заданные в порядке их вхождения в формулу, N_θ – точное количество функций, порождаемых аналитической конструкцией бесскобочных формул и найденное путем решения системы рекуррентных уравнений (11).

На рис. 5 показана зависимость порождающей способности α от количества переменных n. Вычисления выполнены при одинаковых значностях образующей алгебры, функций и их переменных.

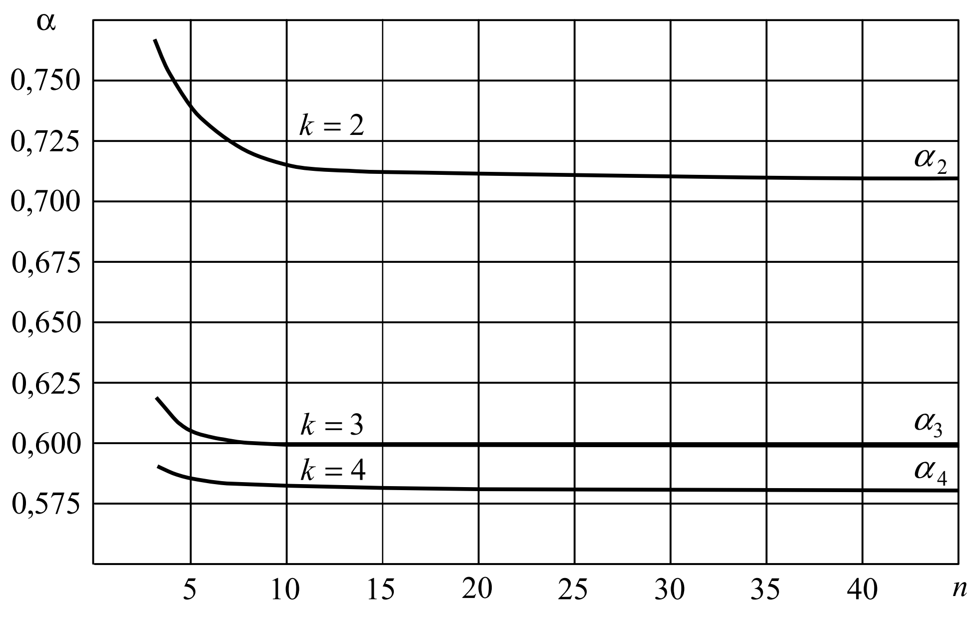

Рис. 5. Порождающая способность бесповторных формул

Заметим, что с ростом n параметр α асимптотически стремиться к некоторой величине α_k, которую назовем *предельной порождающей способностью*. Из (11) находим, что при $n \to \infty$

$$\alpha_k = k - \frac{1}{k}\log_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{k^k - i}{i+1}. \qquad (15)$$

Анализ (15) паказывает, что с ростом k предельная порождающая способность α_k стремиться к единице, однако наименьшее ее значение достигается при $k = 3$ и $k = 4$. Результаты вычисления α_k при различных k с точностью до трех знаков после запятой приведены в табл. 8, а зависимость α_k от k показана на рис. 6.

Таблица 8. Предельная порождающая способность α_k

k	2	3	4	5	6	7	8	9
α_k	0,708	0,578	0,577	0,595	0,612	0,625	0,637	0,647

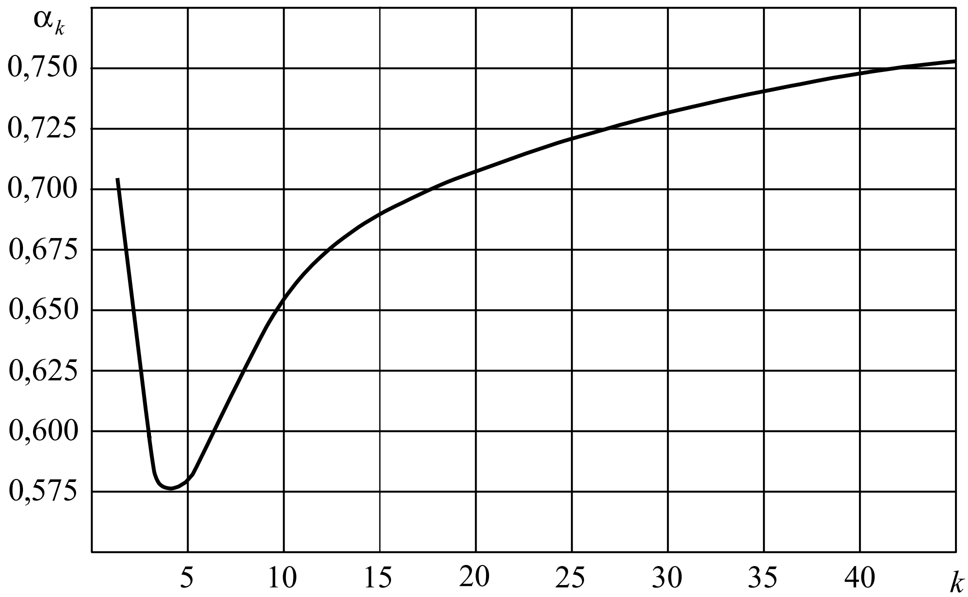

Рис. 6. Предельная порождающая способность

4.6. Скобочная конструкция

Если конструкция (8) является скобочной, то для подсчета количества функций на каждом уровне вложенности скобок применим следующее представление:

$$\theta(X) = \theta_0(X_0) \circ_0 \theta_1(X_1) \circ_1 \ldots \circ_{s-2} \theta_{s-1}(X_{s-1}),$$

где θ_i – некоторые подформулы, заключенные в скобки и зависящие от переменных из подмножества X_i со значностями K_i (рис. 7). В этом случае имеем

$$\begin{cases} N_k(K_0,\ldots,K_t)=\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{C_k^i}{i!i!}N_i(K_0,\ldots,K_{t-1})N_o^{\leftrightarrow}(i,i,i)N_i(K_t); \\ N_\theta(k,K_0,\ldots,K_{s-1})=\sum\limits_{i=1}^{k}C_k^i N_i(K_0,\ldots,K_{s-1}), \end{cases}$$

где $N_k(K_i)$ – количество функций, порождаемых подформулой θ_i, а $N_o^{\leftrightarrow}(k,k_0,k_1)$ – количество операций значности k, порождающих различные функции при их более чем существенной зависимости от двух переменных, т.е. когда матрицы операций не содержат как одинаковых строк, так и одинаковых столбцов.

$$\theta_0(X_0)\ \underset{\circ_0}{\overset{\theta_1(X_1)}{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}} \rightarrow \underset{\circ_1}{\overset{\theta_2(X_2)}{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}} \cdots \underset{\circ_{s-2}}{\overset{\theta_{s-1}(X_{s-1})}{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}}} \rightarrow \theta(X)$$

Рис. 7. Скобочная аналитическая конструкция

Очевидно, $N_o^{\leftrightarrow}(k,k_0,k_1)<N_o^{\rightarrow}(k,k_0,k_1)$. Тогда

$$N_\theta(k,K_0,K_1,\ldots,K_{s-1})<N_\theta(k,k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}).$$

Отсюда делаем вывод, что скобочная аналитическая конструкция является менее выразительной, так как по сравнению с бесскобочной порождает меньшее число функций. Но произвольная расстановка скобок может породить функции, не существующие при естественном порядке вычисления. Однако представить в виде формул большее число m-функций, чем это определено степенями свободы аналитической конструкции, не представляется возможным,

$$N_\theta(k,k_0,k_1,\ldots,k_{n-1})<k^{k_0k_1+k\sum\limits_{i=2}^{n-1}k_i}.$$

4.7. Вхождения переменных

Для задания дискретной функции помимо вектора значений $\mathbf{F}$ также необходим и вектор значностей переменных $\mathbf{K}$, причем один и тот же вектор $\mathbf{F}$ может быть использован для задания различных функций, отличающихся как значностями, так и порядком переменных. Исследуем, как измениться порождающая способность аналитической конструкции формул при изменении порядка вхождения переменных.

Как показано ранее, изменение порядка переменных приводит к перестановке оснований позиционной системы счисления при пересчете значений переменных в индекс элемента вектора функции. Это эквивалентно некоторому переупорядочению его элементов. Но далеко не каждое переупорядочение порождает новую функцию.

Рассмотрим аналитическую конструкцию при одинаковых значностях переменных. В этом случае перестановка переменных, кроме первых двух, преобразует одну конструкцию в другую, порождающую функции из того же множества. Интерпретируя этот результат при произвольных значностях переменных, имеем

$$N_\theta(k, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) < k^{k \sum_{i=0}^{n-1} k_i},$$

где для учета перестановки с участием первых двух переменных оценка несколько увеличена и сделана симметричной. Отсюда делаем вывод, что использование аналитической конструкции формул с изменяемым порядком вхождения переменных не имеет существенного значения для выразительных качеств алгебраической декомпозиции.

Таким образом, при синтезе формул будем использовать бесповторную бесскобочную аналитическую конструкцию формул с фиксированным порядком вхождения переменных.

5. Спектральный синтез формул

Синтез формул осуществим путем разложения функции в спектральном базисе с заранее неизвестным формульным представлением,

(16)
$$f(X) = \sum_{i=0}^{M-1} \theta_i(X) \times a_i,$$

где a_i – константы образующей алгебры.

Поставим задачу поиска во время спектральной декомпозиции не только коэффициентов, но и формул для системы спектральных функций, причем таких, которые обеспечат наименьшую сложность представления.

5.1. Реализуемость спектральных функций

Предварительно исследуем множество спектральных функций в различных образующих алгебрах и определим возможность их порождения формулами с бесповторной аналитической конструкцией.

В алгебре логики и в мультипликативной алгебре количество спектральных функций равно m и $m(k-1)^m$, причем все они легко представляются бесповторными бесскобочными формулами.

В униполярной и биполярной аддитивной алгебре общее количество спектральных функций уже равно $2^m - 1$ и $3^m - 1$, а это превосходит комбинаторные возможности аналитической конструкции. В этом случае требуется порождать только функции значности 2 или 3. В итоге из (11) при $k = 3$ получаем

$$N_\theta(k, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) = N_3(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}),$$

а из (12) следует

$$N_3(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) < 3^{k_0 k_1 + k \sum_{i=2}^{n-1} k_i} \leq 3^{\prod_{i=0}^{n-1} k_i} = 3^m.$$

В фундаментальной алгебре имеем два случая. При конечной значности образующей алгебры декомпозиция производится в конечном поле, а когда алгебра определена на счетном множестве элементов – в коммутативном кольце без делителей нуля. Соответственно в конечном поле число спектральных функций конечно, в то время как в кольце имеется счетное их число. Так как все реальные вычисления производятся при ограниченной разрядности чисел, то практически значимым является использование некоторого конечного набора из $k^m - 1$ спектральных функций, где k ограничивается разрядностью вычислительного средства. Тогда из (12) получаем

$$N_\theta(k, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) < k^{k_0 k_1 + k \sum_{i=2}^{n-1} k_i} \leq k^{\prod_{i=0}^{n-1} k_i} = k^m.$$

Таким образом, полное использование комбинаторных возможностей бесповторной аналитической конструкции возможно только в аддитивной и фундаментальной алгебрах. В других алгебрах аналитическая конструкция является избыточной и не влияет на эффективность синтеза.

Особенности декомпозиции функций в алгебре логики и в мультипликативной алгебре подробно рассмотрены в [62]. Далее будем предполагать, что декомпозиция производится в аддитивной или фундаментальной алгебре. В аддитивной алгебре число спектральных функций будем оценивать неравенствами

$$k^{(k_0 k_1 + (k-1)\sum_{i=2}^{n-1} k_i)\log_k 3} < N_\theta(3, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) < k^{(k_0 k_1 + k\sum_{i=2}^{n-1} k_i)\log_k 3}, \tag{17}$$

а в фундаментальной алгебре будем использовать только те спектральные функции, которые представимы при заданной разрядности вычислительного средства, т.е. конечное их число.

5.2. Классы эквивалентности бесповторных формул

Как показано ранее, существует некоторое число бесповторных формул N_θ, представляющих различные функции. В свою очередь функции, порождаемые бесповторной аналитической конструкцией в каждой алгебре образуют множество базисов, состоящих из линейно независимых функций. Каждый такой базис может содержать не более чем m функций, где m произведение значностей переменных. Любая другая функция, не входящая в базис, может быть представлена как линейная комбинация базисных.

С другой стороны все функции, порождаемые бесповторной аналитической конструкцией могут быть разбиты на классы эквивалентности. Пусть аналитической конструкцией порождается некоторая функция θ_i. Тогда множество порождаемых функций содержит и функции, получаемые из θ_i умножением элементов матрицы последней операции на ненулевую константу. Последнее означает, что рассматриваемому множеству принадлежат и функции $\theta_i \times a$, $a \neq \sigma$. В фундаментальной алгебре таких констант $k-1$. Следовательно, в каждом таком классе ровно $k-1$ функция. В униполярной аддитивной алгебре имеется всего одна константа, т.е. все функции являются взаимно линейно независимыми, в биполярной алгебре таких констант может быть две.

Очевидно, в разложении (16) различные комбинации линейно независимых функций порождают различные функции. Используем это свойство для определения сложности спектрального разложения.

5.3. Сложность спектрального разложения

Множество бесповторных бесскобочных формул в образующей алгебре разбивается на классы эквивалентности, включающие функции с точностью до ненулевого множителя. Следовательно, в спектральном разложении (16) операция умножения может быть опущена,

$$f(X) = \sum_{i=0}^{M-1} \theta_i(X). \tag{18}$$

Пусть в разложении (18) при $M < m$ различные комбинации спектральных функций θ_i, взятые из различных классов, порождают различные функции (рис. 8)[1]. Тогда для порождения всех функций необходимо, чтобы

[1] Допущение о том, что различные комбинации спектральных функций порождают различные функции основано на следующих соображениях. Известно [63], что количество невырожденных матриц размерности

$$k^m = \sum_{i=1}^{M} C_{N_c}^i (k-1)^i \,, \tag{19}$$

где $N_c = N_\theta / (k-1)$ – число классов функций, задаваемых с точностью до множителя и порождаемых канонической аналитической конструкцией бесповторных бесскобочных формул, $C_{N_c}^i$ – количество неупорядоченных выборок i функций из N_c.

$$\left[\begin{array}{cccc:cc} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \phi & \phi \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \phi & \phi \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \phi & \phi \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \phi & \phi \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \phi & \phi \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \phi & \phi \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ \hdashline \phi \\ \phi \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{array}\right]$$

Рис. 8. Спектральное разложение: θ_i – элементы линейно независимых столбцов; ϕ – нулеобразующий элемент; $+$ – свободные элементы; $*$ – произвольные элементы

Так как $m < N_c$ и $2M < N_c$, то из (19) получаем

$$2^{-M} N_c^M (k-1)^M < k^m < N_c^M (k-1)^M \,,$$

а после логарифмирования с учетом (13) и (17) имеем оценку максимального числа слагаемых M_A и M_F при спектральной декомпозиции в аддитивной и фундаментальной алгебре соответственно:

$$M_A = \frac{1}{\log_k 3} \frac{1}{k-\alpha} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta}, \quad M_F = \frac{1}{k-\alpha} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta}, \tag{20}$$

где β – поправочный коэффициент, необходимый для учета начальной порождающей способности аналитической конструкции,

$$\beta = k_0 + k_1 - \frac{k_0 k_1}{k-\alpha}.$$

Для оценки M будем использовать граничные значения α, а для точных вычислений – некоторое его промежуточное значение. Будем полагать, что $2k \ge k_i$, тогда $\beta \ge 0$.

$m \times m$ и значности k равно $k^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^{m} (k^i - 1)$. Отсюда может быть найдена доля невырожденных матриц с различающимися столбцами от общего их числа, которая при любых k и m всегда больше некоторой константы $\chi \ge 0{,}5$, т.е. число спектральных базисов, составляемых из различных функций соизмеримо с максимально возможным их числом. Учет константы χ не изменяет существенным образом получаемые оценки сложности спектрального разложения, так как число доступных спектральных функций (как и число формируемых из них спектральных базисов) достаточно велико.

При одинаковых значностях переменных, равных k, формула (20) принимает более простой вид

$$M = \frac{k^{n-1}}{(k-\alpha)(n-2)+k}.$$

В частности, когда $n = 2$, имеем $M = 1$, что согласуется с возможностью представления произвольной функции двух переменных формулой с одной операцией.

Из (20) следует, что сложность спектрального разложения определяется с точностью до значностей первых двух переменных, а наиболее компактные разложения получаются в фундаментальных алгебрах. Поэтому разложения функций далее будем осуществлять в конечных полях или коммутативных кольцах без делителей нуля.

5.4. Сложность спектрального представления

Для максимального количества операций L, необходимых для реализации произвольной функции от n переменных со значностями k_0, k_1, …, k_{n-1}, из (20) следует

$$L(k, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) = \frac{n}{k-\alpha} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta},$$

а после очевидных преобразований имеем

(21) $$L(k, k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) = \frac{C}{2} m,$$

где C – константа, характеризующая аналитическую конструкцию формул,

(22) $$C = \frac{1}{k-\alpha} \frac{2}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta\right)}.$$

Оценка (21) минимальна, когда значности переменных стремятся к их среднему геометрическому,

$$k_j \to \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} k_i} = \sqrt[n]{m} \quad (j = \overline{0, n-1}).$$

В этом случае для спектрального разложения имеем

$$L(n) = \frac{nk^{n-1}}{(k-\alpha)(n-2)+k}.$$

5.5. Точность спектральных оценок

Ввиду того, что декомпозируемая функция была заранее не известна, нами получены оценки для максимально возможной сложности разложения и сложности представления функции. Точные значения перечисленных характеристик имеют смысл только для зафиксированной функции. Нами также найдены точные максимальные значения для M и L. Для получения последних в формулу (19) подставляется точное число формул N_θ, откуда находится M , а через него и точное значения L.

Нахождение точных характеристик связано с определенными вычислительными трудностями. Однако имеется возможность определить область применимости полученных оценочных значений. Для этого найдем долю функций δ от общего их числа, имеющих меньшую сложность, чем максимально возможная. Как и ранее, получим как точные, так и оценочные значения δ.

Очевидно, функции, имеющие максимальную сложность, представимы разложением с M слагаемыми, где M – максимальное их число. Отсюда из (19) получаем точное и оценочное значение δ,

$$\delta(m) = \frac{\sum_{i=1}^{M(1-\varepsilon)} C_{N_c}^{i} (k-1)^i}{k^m} < k^{-\varepsilon m}, \tag{23}$$

где ε – доля слагаемых от максимального их числа, на которую уменьшается сложность разложения функции.

Из неравенства (23) видно, что с ростом m последовательность $\delta(m)$ является ограниченной, так как $\delta(m) < k^{-\varepsilon m}$, и монотонно возрастающей, так как $\delta(m) < \delta(m+1)$, следовательно, она имеет предел. Тогда, с ростом m доля функций δ, имеющих меньшую сложность, чем максимально возможная, стремится к нулю. Делаем вывод, что при спектральной декомпозиции количество ненулевых коэффициентов M в разложении функции и число операций L в синтезируемой при этом формуле удовлетворяют следующим асимптотическим оценкам:

$$M \sim \frac{C_\infty}{2}\frac{m}{n}, \quad L \sim \frac{C_\infty}{2} m, \quad C_\infty = \frac{1}{k-\alpha_k}\frac{2}{\bar{k}}, \tag{24}$$

где ~ – знак асимптотического равенства, α_k – предельная порождающая способность аналитической конструкции, $\bar{k}$ – средняя значность переменных. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ доля функций δ от общего их числа, для которых

$$M < (1-\varepsilon)\frac{C_\infty}{2}\frac{m}{n}, \quad L < (1-\varepsilon)\frac{C_\infty}{2} m,$$

меньше, чем $k^{-\varepsilon m}$, и стремится к нулю с ростом m.

6. Синтез формул при решающей декомпозиции

Ранее показано, что сложность представления функции при ее спектральном разложении примерно в $(k-\alpha)\bar{k}$ раз меньше длины вектора функции. Найдем, как изменится сложность представления при решающей декомпозиции.

6.1. Связанные коэффициенты

Усложним аналитическую конструкцию синтезируемых формул, для чего рассмотрим решающую декомпозицию вида

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M-1}\theta_i'(X')\times\theta_i''(X'')=\sum_{i=0}^{M-1}\theta_i(X',X''), \tag{25}$$

где θ_i' и θ_i'' – бесповторные бесскобочные подформулы, $\theta_i(X',X'')$ – бесповторные скобочные формулы с двумя парами скобок единичной глубины вложенности.

На рис. 9 показано, что спектральные функции и функции-коэффициенты в рассматриваемом случае являются связанными, т.е. возможность их изменения определяется комбинаторными возможностями аналитической конструкции бесповторных бесскобочных формул.

$$\begin{bmatrix}\theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \theta_4' & \theta_5' & \theta_6' & \theta_7'\\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \theta_4' & \theta_5' & \theta_6' & \theta_7'\\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \theta_4' & \theta_5' & \theta_6' & \theta_7'\\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \theta_4' & \theta_5' & \theta_6' & \theta_7'\\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \theta_4' & \theta_5' & \theta_6' & \theta_7'\\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \theta_4' & \theta_5' & \theta_6' & \theta_7'\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\theta_0'' & \theta_0'' & \theta_0'' & \theta_0''\\ \theta_1'' & \theta_1'' & \theta_1'' & \theta_1''\\ \theta_2'' & \theta_2'' & \theta_2'' & \theta_2''\\ \theta_3'' & \theta_3'' & \theta_3'' & \theta_3''\\ \theta_4'' & \theta_4'' & \theta_4'' & \theta_4''\\ \theta_5'' & \theta_5'' & \theta_5'' & \theta_5''\\ \theta_6'' & \theta_6'' & \theta_6'' & \theta_6''\\ \theta_7'' & \theta_7'' & \theta_7'' & \theta_7''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}* & * & * & *\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\\ * & * & * & *\end{bmatrix}$$

Рис. 9. Решающее разложение при связанных коэффициентах: θ_i' – элементы линейно независимых столбцов; θ_i'' – элементы линейно независимых строк; $*$ – произвольные элементы

Подсчитаем количество функций, порождаемых разложением (25). Для порождения всех функции необходимо, чтобы

$$k^m=\sum_{i=1}^{M}C_{N_c'}^{i}C_{N_c''}^{i}(k-1)^i\ ,$$

где N_c' и N_c'' – число классов функций с длиной вектора k' и k'' соответственно. По аналогии со спектральным разложением имеем

(26)
$$M = \frac{1}{k-\alpha}\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta' - \beta''},$$

где

$$\beta' = k_0' + k_1' - \frac{k_0' k_1' - 1}{k-\alpha}, \quad \beta'' = k_0'' + k_1'' - \frac{k_0'' k_1'' - 1}{k-\alpha}.$$

Как и следовало ожидать, использование скобочных конструкций незначительно увеличило сложность разложения, однако при большой длине вектора функции это не оказывает заметного влияния. Из оценки (26) также видно, что сложность разложения не зависит от разделения переменных, а при небольшом числе переменных определяется с точностью до выбора первых двух переменных из каждого подмножества.

6.2. Свободные коэффициенты

Рассмотрим решающее разложение при свободных коэффициентах,

(27)
$$f(X) = \sum_{i=0}^{M-1} \theta_i'(X') \times a_i(X''),$$

где a_i – произвольные функции, формульные представления которых неизвестны.

На рис. 10 показано, что спектральные функции являются связанными и порождаются бесповторной аналитической конструкцией, а функции-коэффициенты – свободными, так как имеется возможность их изменения произвольным образом.

$$\left[\begin{array}{cccc:cc} \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{cccc} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ \hdashline \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right]$$

Рис. 10. Решающее разложение при свободных коэффициентах: θ_i' – элементы линейно независимых столбцов; $+$ – свободные элементы; $*$ – произвольные элементы, ϕ – нулеобразующий элемент

Воспользуемся степенями свободы в задании спектральных функций в разложении (27) при минимальном M и представим используемые спектральные функции бесповторными формулами. Выберем в качестве первого приближения системы спектральных функций линейно независимые столбцы матрицы функции (рис. 11).

$$\left[\begin{array}{cccc:cc} \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' & \phi & \phi \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{cccc} \tau & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \tau & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \tau & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \tau \\ \hdashline \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' \\ \theta_0' & \theta_1' & \theta_2' & \theta_3' \end{array}\right]$$

Рис. 11. Первое приближение спектральных функций: θ_i' – элементы линейно независимых столбцов функции; ϕ – нулеобразующий элемент; τ – единичный элемент

Прибавим к правой и левой частям формулы (27) элемент $c \times \theta_u(X') \times a_v(X'')$, где u и v – допустимые индексы, c – произвольная константа. После приведения подобных слагаемых находим, как изменились в разложении функции и коэффициенты:

$$\theta_v'(X') = \theta_v'(X') + c \times \theta_u'(X'), \quad a_u(X'') = a_u(X'') - c \times a_v(X'').$$

Отсюда делаем вывод, что для формирования системы спектральных функций возможно использование различных линейных комбинаций столбцов исходной матрицы. Количество таких комбинаций равно $k^{k''} - 1$, а это позволяет сформировать фактически произвольную систему функций, в том числе и представимую формулами с наименьшим числом операций.

При уменьшении k'' количество слагаемых в разложении уменьшается. В пределе имеем тривиальное разложение, состоящее из одной функции и одного коэффициента. Однако такая функция не имеет бесповторного представления, как изначально не имеет такого представления декомпозируемая функция. Следовательно, существует некоторое минимальное k'', при котором система спектральных функций все еще представима бесповторными формулами.

Так как при $k'' \le k'$ спектральные функции фактически произвольные, представим их как спектральное разложение некоторой неизвестной функции с длиной вектора k'. Тогда из (20) следует условие

$$\prod_{j=0}^{n''-1} k_j'' = \frac{1}{k-\alpha} \frac{\prod_{i=0}^{n'-1} k_i'}{\sum_{i=0}^{n'-1} k_i' - \beta'}, \tag{28}$$

при котором гарантируется представимость системы из k'' спектральных функций длины k' бесповторными формулами, а сложность решающего разложения M при свободных коэффициентах станет равна k''.

6.3. Двухступенчатая декомпозиция

Рассмотрим декомпозицию со свободными коэффициентами, у которой коэффициенты, в свою очередь, подвергнуты спектральному разложению,

$$f(X)=\sum_{i=0}^{M'-1}\theta'_i(X')\times\sum_{j=0}^{M''-1}\theta''_{ij}(X'')=\sum_{i=0}^{M-1}\theta_i(X',X''),$$

где $M=M'M''$, $M'=k''$, θ'_i и θ''_{ij} – бесповторные бесскобочные конструкции, θ_i – бесповторные скобочные формулы, состоящие из двух бесскобочных подформул.

Из (20) и (28) получаем

$$M=\frac{1}{(k-\alpha)^2}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}k_i}{(\sum_{i=0}^{n'-1}k'_i-\beta')(\sum_{j=0}^{n''-1}k''_j-\beta'')}. \tag{29}$$

Найдем разделение переменных, которое обеспечивает наименьшую сложность разложения. Сформулируем задачу поиска условного экстремума (29):

$$\begin{cases} s=\sum_{i=0}^{n'-1}k'_i+\sum_{j=0}^{n''-1}k''_j; \\ m=(k-\alpha)\Big(\sum_{i=0}^{n'-1}k'_i-\beta'\Big)\prod_{j=0}^{n''-1}k''^2_j; \\ (\sum_{i=0}^{n'-1}k'_i-\beta')(\sum_{j=0}^{n''-1}k''_j-\beta'')\to\max, \end{cases} \tag{30}$$

где s и m – константы, первое и второе тождество задает зависимость переменных, а последнее выражение определяет целевую функцию. Решение (30) методом неопределенных множителей Лагранжа [64, с. 386] выявляет следующую связь между значностями переменных[1], при которой достигается глобальный максимум целевой функции:

$$\sum_{i=0}^{n'-1}k'_i-\sum_{j=0}^{n''-1}k''_j=\mu(2n''-1),$$

где μ – некоторая константа, не зависящая от разделения переменных. Полагая $\mu(2n''-1)=\rho\, n$, получаем

---

[1] Решение (30) получено при условии $\sum_{i=0}^{n'-1}k'_i>>\beta'$.

$$M = \frac{4}{(k-\alpha)^2} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta' - \beta'')^2 - \rho^2 n^2}, \quad \rho = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=0}^{n'-1} k_i' - \sum_{j=0}^{n''-1} k_j''\Big) \approx \frac{\bar{k}\mu}{\bar{k}+\mu}\frac{n-1}{n},$$

где ρ – параметр, характеризующий разделение переменных, а $\bar{k}$ – их средняя значность.

Для оценки μ используем условие (28), заданное при одинаковых значностях переменных. После несложных преобразований имеем

$$\mu = \frac{\log_k \frac{1}{2}(k-\alpha)\bar{k}n}{n-1}.$$

Заметим, что оптимальное значение ρ стремиться к нулю с ростом n. На рис. 12 приведена зависимость оптимального значения ρ от количества переменных n при их одинаковой значности, равной k.

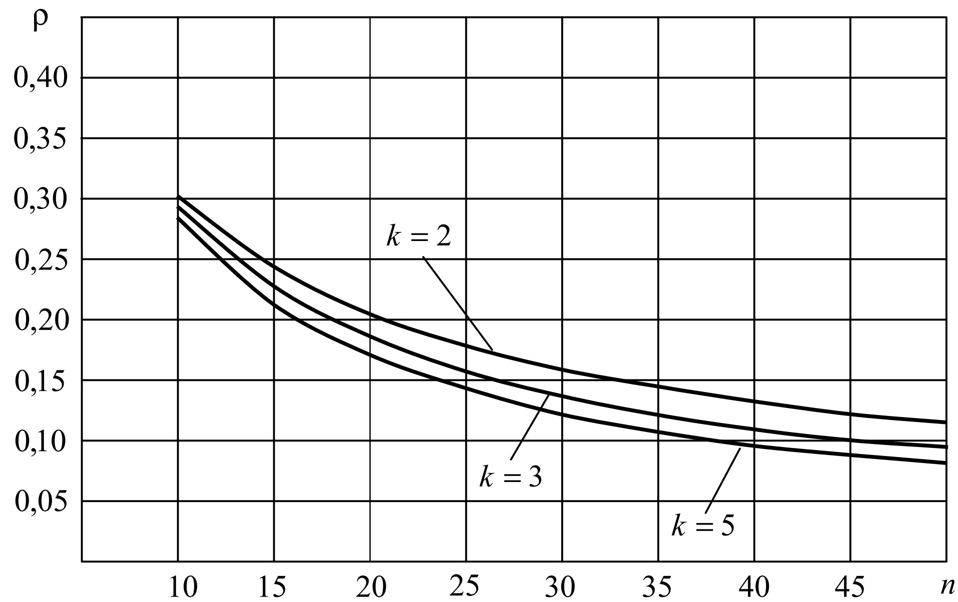

Рис. 12. Оптимальное разделение переменных

6.4. Многоступенчатая декомпозиция

Максимально усложним аналитическую конструкцию формул и рассмотрим декомпозицию при свободных коэффициентах, у которой функции-коэффициенты, в свою очередь, подвергнуты декомпозиции со связанными коэффициентами,

$$f(X) = \sum_{i=0}^{M'-1} \theta_i'(X') \times \sum_{j=0}^{M''-1} \theta_{ij}''(X_0'', X_1'') = \sum_{i=0}^{M-1} \theta_i(X', X_0'', X_1''),$$

где $M = k''M''$, θ'_i – бесповторные бесскобочные формулы, θ''_{ij} – бесповторные скобочные формулы, состоящие из двух бесскобочных подформул, $X'' = X''_0 \cup X''_1$, а θ_i – бесповторные формулы, состоящие из трех бесскобочных подформул.

Аналогично двухступенчатой декомпозиции находим оценку сложности разложения

$$M = \frac{4}{(k-\alpha)^2} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \beta' - \beta''_0 - \beta''_1)^2 - \rho^2 n^2},$$

а обобщая полученный результат на случай относительно произвольной расстановки скобок, имеем

$$M = \frac{4}{(k-\alpha)^2} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \sum_{j=0}^{\gamma-1} \beta_j)^2 - \rho^2 n^2}, \tag{31}$$

где γ – количество скобок в аналитической конструкции, $2 \le \gamma < \log_2 n - 1$, β_j – поправочные коэффициенты, зависящие от значностей операндов первых операций в каждой из скобок.

Очевидно, увеличивая глубину вложенности скобок, оценку (31) можно только ухудшить. Из анализа (31) также следует, что наименьшая сложность разложения достигается при $\gamma = 2$.

6.5. Сложность представления

Из формулы (31) получаем максимальное количество операций, необходимых для представления произвольной функции,

$$L = C^2 \frac{m}{n}, \qquad C = \frac{1}{k-\alpha} \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i - \sum_{j=0}^{\gamma-1} \beta_j\right)\right)^2 - \rho^2}}, \tag{32}$$

где C – константа, характеризующая аналитическую конструкцию, α – порождающая способность формул, γ – количество скобок, β_j – поправки для начальной порождающей способности скобочных подформул, ρ – оптимальность разделения переменных.

Из (32) находим, что количество ненулевых коэффициентов M в решающем разложении функции и число операций L в синтезируемой при этом формуле удовлетворяют следующим асимптотическим оценкам:

$$M \sim C_\infty^2 \frac{m}{n^2}, \quad L \sim C_\infty^2 \frac{m}{n}, \quad C_\infty = \frac{1}{k-\alpha_k} \frac{2}{\bar{k}}, \tag{33}$$

причем для любого $\varepsilon > 0$ доля функций δ от общего их числа[1], для которых

$$M < (1-\varepsilon) C_\infty^2 \frac{m}{n^2}, \quad L < (1-\varepsilon) C_\infty^2 \frac{m}{n},$$

стремится к нулю с ростом m как $k^{-\varepsilon\sqrt{m}}$.

Зависимость квадрата C_∞ от значности образующей алгебры k показана на рис. 13. В частности, из (33) следует асимптотическая оценка количества операций, необходимых для представления произвольной булевой функции,

$$L(n) \sim \frac{4}{(1+\log_2 3)^2} \frac{2^n}{n} \approx 0{,}5986 \frac{2^n}{n},$$

которая согласуется с оценкой количества команд (операторов и условных перереходов), полученной для программной реализации последней [65]. Заметим, что программная реализация булевых функций имеет ту же природу, что и аппаратурная [66].

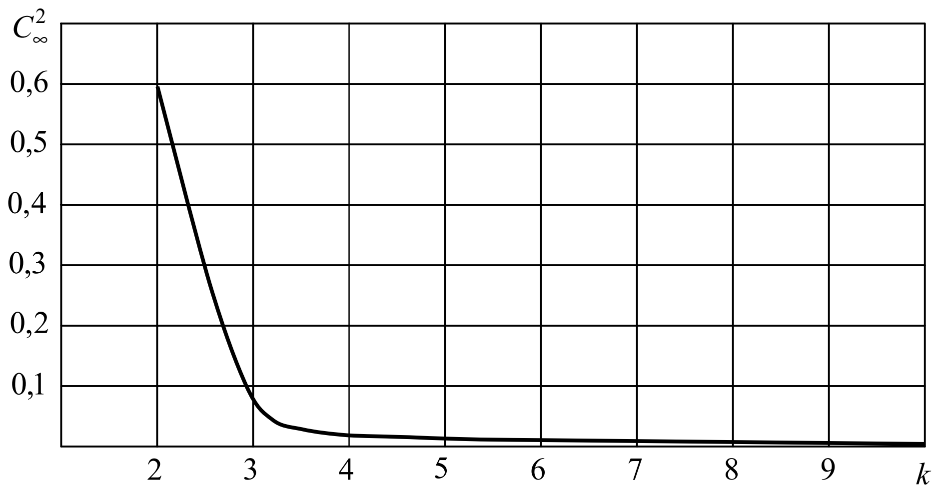

Рис. 13. Зависимость C_∞^2 от значности образующей алгебры k

[1] Сложность решающего разложения может быть уменьшена только за счет последующего спектрального разложения коэффициентов. Полагая $k'' < \sqrt{m}$, из (23) получаем искомую долю функций.

7. Заключение

Объединение алгебраических методов, разделительной декомпозиции и ортогональных разложений позволяет синтезировать оптимальные формульные представления дискретных функций.

Однако при достаточно большой длине вектора почти все функции реализуются со сложностью, близкой к максимальной. Если функция принадлежит множеству функций, требующих для своей реализации меньшее число операций, чем получаемое при оптимальном синтезе, то возможна ее *минимизация*. При этом целесообразно использовать, в том числе и скобочные аналитические конструкций с произвольным порядком вхождения переменных. Если же функция принадлежит множеству функций с максимальной сложностью, то следует говорить о ее *оптимальном синтезе*, для реализации которого достаточно бесповторных бесскобочных формул с фиксированным порядком вхождения переменных.

Последнее достижимо при алгебраической декомпозиции булевых функций (возможно с небулевыми переменными) в аддитивной алгебре, осуществляемой по системам мультимодальных двузначных или трехзначных спектральных функций, а многозначных функций – только в фундаментальной алгебре (конечных полях и коммутативных кольцах без делителя нуля), осуществляемой по системам мультимодальных многозначных функций. В свою очередь в алгебре логики и в мультипликативной алгебре, где разложение осуществляется по унимодальным двузначным и многозначным спектральным функциям соответственно, получение оптимальных представлений наперед не известной дискретной функции не представляется возможным.

При алгебраической декомпозиции, в отличие от разделительной, не требуется проверять все варианты разделения переменных. Минимизация числа ненулевых коэффициентов обеспечивается оптимальным их разделением, при котором гарантируется бесповторное представление спектрального базиса.

В отличие от алгебраического подхода, основанного на получении формулы функции и ее тождественных преобразованиях, при алгебраической декомпозиции возможен прямой синтез оптимального представления. Ортогональность алгебраического разложения и фундаментальность синтезируемых спектральных функций позволяют применить хорошо разработанный аппарат линейной алгебры.

Таким образом, при алгебраической декомпозиции возможно получение оптимальных формульных представлений. Для таких представлений найдены как точные оценки сложности синтезируемых формул, так и их асимптотические значения. Однако нерешенной осталась задача разработки прикладных алгоритмов синтеза бесповторного представления спектрального базиса при спектральном и решающем разложении функции. Следует ожидать, что трудоемкость этих алгоритмов будет достаточно высока.

Автоматика и телемеханика. 2006. № 3. С. 20-56.

Список литературы

1. *Boole G.* The Laws of Thought. London: Macmillan, 1854.

2. *Жегалкин И.И.* О технике вычисления предложений в символической логике // Мат. сборник. 1927. Т. 43. С. 9-28.

3. *Shannon C.E.* The A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. Amer. Inst. Electrical Eengin. 1938. V. 57. P. 713.

4. *Shannon C.E.* The Synthesis of Two-Terminal Switching Circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. No. 1. P. 59-98.

5. *Гаврилов М.А.* Релейно-контактные схемы с вентильными элементами // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 3. С. 153-164.

6. *Гаврилов М.А.* Методы синтеза релейно-контактных схем. // Электричество. 1946. № 2. С. 54-59.

7. *Ashenhurst R.L.* The Decomposition of Switching Functions // Bell Laboratory Report, 1952. No. BL-1(11). P. 541-642.

8. *Semon W.L.* Characteristic Numbers and Their Use in the Decomposition of Switching Functions // Proc. ACM. 1952. V. 17. P. 273-280.

9. *Поваров Г.Н.* О функциональной разделимости булевых функций // Докл. АН СССР. 1954. Т. 94. С. 801-803.

10. *Reed L.S.* A class of multiple error correction codes and their decoding scheme // IRE Trans. Inform. Theory. 1954. V. 4. P. 38-42.

11. *Muller D.E.* Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection // IRE Trans. Electron. Comput. 1954. V. EC-3. P. 6-12.

12. *Curtis H.A.* Non-Disjunctive Decomposition // Bell Laboratory Report, 1958, No. 19. P. 49.

13. *Akers S.B.* On a Theory of Boolean Functions // J. Soc. Industrial Appl. Math. 1959. V. 7. No.4. P. 487-498.

14. *Roth J.P.* Minimization over Boolean Trees / /IBM J. 1960. V. 4, 5. P. 543-555.

15. *Roth J.P., Karp R.M.* Minimization Over Boolean Graphs // IBM J. Res. Dev. 1962. V. 6. No.2. P. 227-238.

16. *Кузнецов А.В.* О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1958. Т. 51. С. 186-225.

17. *Ничепорук Э.И.* О синтезе схем с помощью линейных преобразований переменных // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. Вып. 4. С. 610-612.

18. *Maitra K.K.* Cascaded Switching Networks of Two-Input Flexible Cells // IRE Trans. Electron. Comput. 1962. V. TC-11. P. 136-143.

19. *Lee C.Y.* Representation of switching circuits by binary decision programs // Bell Sys. Techn. J. 1959. V. 38, No. 4. P. 985.

20. *Akers S.B.* Binary decision diagrams // IEEE Trans. Comput. 1978. V. C-27. No. 6. P. 509-516.

21. *Карповский М.Г., Москалев Э.С.* Реализация частично-определенных функций алгебры логики с помощью разложения в ортогональные ряды // АиТ. 1970. № 8. С. 89-99.

22. *Lechner R.J.* Harmonic Analysis of Switching Functions. // Recent Developments in Switching Theory. Academic Press, 1971. P. 121-228.

23. *Поваров Г.Н.* Математическая теория синтеза контактных (1,k)-полюсников // Докл. АН СССР. 1955. Т. 5.

24. *Блох А.Ш.* Канонический метод синтеза контактных схем // АиТ. 1961. № 6. С. 756-764.

25. *Пархоменко П.П.* Синтез релейных структур на различных функционально полных системах логических элементов // АиТ. 1964. № 6. С. 963-979.

26. *Горовой В.Р.* Синтез релейных структур методом замены выходных функций // АиТ. 1967. № 1. С. 112-121.

27. *Горбатов В.А.* Синтез логических схем в произвольном базисе // Теория дискретных автоматов. Рига: Зинатне, 1967.

28. *Rudeanu S.* Boolean Functions and Equations. Amsterdam; London: North-Holland Publ. Co., 1974.

29. *Закревский А.Д.* Логические уравнения. Минск: Наука и техника, 1975.

30. *Шеннон К.Э.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

31. *Яблонский С.В.* Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 75-121.

32. *Лупанов О.Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем. М.: Физматгиз, 1963. Вып. 10. С. 63-97.

33. *Vranesic Z.C., Lee E.S., Smith K.S.* A Many-Valued Algebra for Switching Systems // IEEE Trans. Comput. 1970. V. C-19. P. 964-971.

34. *Малюгин В.Д.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // АиТ. 1982. № 4. С. 84-93.

35. *Лапкин Л.Я.* О векторной программной реализация логических функций // АиТ. 1983. № 3. С. 120-128.

36. *Выхованец В.С., Малюгин В.Д.* Кратные логические вычисления // АиТ. 1998. № 6. С. 163-171.

37. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5-142.

38. *Walliuzzaman K.M., Vranesic Z.G.* On Decomposition of Multiple-Valued Switching Functions // Comput. J. 1970. V. 13. P. 359-362.

39. *Su Y.H., Cheung P.T.* Computer Minimization of Multiple-Valued Switching Function // IEEE Trans. Comput. 1972. V. C21. P. 995-1003.

40. *Tokmen V.H.* Disjoint Decomposability of Multi-Valued Functions by Spectral Means // Proc. IEEE 10th Int. Symp. on Multiple Valued Logic. 1980. P. 83-89.

41. *Strazdins I.* The Polynomial Algebra of Multiple-Valued Logic // Algebra, Combinat. and Logic Comput. Sc. 1983. V. 42. P. 777-785.

42. *Perkowski M.A.* The Generalized Orthonormal Expansion of Function with Multiple-Valued Inputs and Some of its Application // Proc. Int. Symp. Multi-Valued Logic. 1992. P. 442-450.

43. *Post T.L.* Introduction to a General Theory of Elementary Proposition // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 163-185.

44. *Webb D.L.* Generation of any N-valued Logic by One Binary Operator // Proc. Nat. Acad. Sci. 1935. V. 21. P. 252-254.

45. *Bernstein B.* Operations with Respect to witch the Elements of Boolean Algebra from a Group // Trans. Amer. Math. Soc. 1924. V. 26. P. 171-175.

46. *Cohn M.* Switching Functions Canonical Form over Integer Fields (Ph.D. Thesis). Cambridge: Harvard Univ., 1960.

47. *Tosic Z.* Analytical Representation of an m-Valued Logical Function over the Ring of Integers Modulo m (Ph.D. Thesis). Beograd, 1972.

48. *McCluskey E.J.* Logic Design of Multivalued IIL Logic Circuits // IEEE Trans. Comput. 1979. V. C28. No. 8. P. 564-569.

49. *Закревский А.Д.* Алгоритм декомпозиции булевых функций // Тр. Сиб. физ.-техн. ин-та. 1964. Вып. 44. С. 5-16.

50. *Выхованец В.С.* Спектральные методы в логической обработке данных // АиТ. 2001. № 10. С. 28-53.

51. *Лупанов О.Б.* Об одном методе синтеза схем // Изв. высш. уч. зав. Радиофизика. 1958. № 1. С. 120-140.

52. *Фараджиев Р.Г., Ципкин Я.З.* Преобразования Лапласа-Галуа в теории последовательных машин // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 36.

53. *Rader C.M.* Discrete convolution via Mersenne transorm // IEEE Trans. Comput. 1972. V. C-21. No. 12. P. 1269-1273.

54. *Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1983.

55. *Rademacher H.* Einige Sätze von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Annalen. 1922. V. 87. P. 122-138.

56. *Walsh J.L.* A closed set of orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. V. 55. P. 5-24.

57. *Haar A.* Zur Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme. // Math. Ann. 1910. V. 69. P. 331-371.

58. *Виленкин Н.Я.* Класс польностью ортогональных систем // Изв. АН СССР. 1947. Сер. Математика. № 11. С. 363-400.

59. *Chrestenson H.E.* A class of generalized Walsh functions // Pacific J. Math. 1955. V. 5. P. 17-31.

60. *Ахмед Н., Рао К.Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980.

61. *Выхованец В.С.* Полиномиальная факторизация спектральных базисов // АиТ. 2005. № 12. С. 5-18.

62. *Выхованец В.С., Малюгин В.Д.* Мультипликативная алгебра и ее применение в логической обработке данных // Пробл. управления. 2004. № 3. С. 89-95.

63. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.

64. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980.

65. *Кузьмин В.А*. Оценка сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Новосибирск: 1976. Вып. 29. С. 24-36.

66. *Кузнецов О.П.* О программной реализации логических функций и автоматов // АиТ. 1977. № 7. С. 163-174. № 9. С. 137-139.