Тез. докл. 2-ой Межд. конф. по проблемам управления. М., 2003. Т. 2. С. 110-111.

Мультипликативные формы и их применение при логических вычислениях

Выхованец В.С., Малюгин В.Д.

Институт проблем управления РАН, vyk@ipu.ru, Москва, Профсоюзная, 65

В работе [1] приведены пять алгебраических систем, применяемых при логических вычислениях с многозначными данными: алгебра логики, мультипликативная и аддитивная алгебры, конечное поле и целостное кольцо.

Мультипликативной алгеброй называется алгебраическая система $R=<N_k,+,\times>$, заданная на конечном множестве N_k из k элементов и образованная двумя операциями, которые условно назовем сложением $+$ и умножением $\times$, удовлетворяющими следующим условиям:

– существует логический нуль σ и логическая единица τ, такие что $a+\sigma=a$, $\sigma+a=a$, $\tau\times a=a$ и $\sigma\times a=\sigma$;

– операция умножения имеет обратную, т.е. уравнения вида $a\times x=b$ и $x\times a=b$ имеют единственное решение для любых $a,b\neq\sigma$.

Произвольная дискретная функция f, зависящая от n переменных x_0, $x_1,\ldots,x_{n-1}$ со значностями k_0, $k_1,\ldots,k_{n-1}$, представляется в виде выражения в мультипликативной алгебре:

$$f(x_0,x_1,...,x_{n-1})=\sum_{i=0}^{k_0k_1...k_{t-1}-1}\theta_i(x_0,x_1,...,x_{t-1})\times a_i(x_t,x_{t+1},...,x_{n-1}), \tag{1}$$

где θ_i – спектральные функции от t переменных, a_i – коэффициенты разложения (функции, зависящие от $n-t$ переменных). При $t=0$ получаем спектральное представление, у которого коэффициенты разложения – константы. Если $t>0$, то представление называется решающим (decision).

Выражение (1) представляется в матричной форме $F=D\times A$, где F – матрица функции размерности $(k_0k_1...k_{t-1})\times(k_tk_{t+1}...k_{n-1})$, D – квадратная матрица преобразования размерности $k_0k_1...k_{t-1}$, A – соответствующая матрица коэффициентов. Синтез формы сводится к нахождению матрицы обратного преобразования Q, такой, что $A=Q\times F$.

Для представления произвольной дискретной функции в мультипликативной форме необходимо и достаточно, чтобы матрица прямого преобразования D была мономиальной. Тогда $Q=\overline{D}^T$, где $\overline{D}$ – матрица, получаемая из D путем замены ненулевых элементов d_{ij} на элементы q_{ij}, такие что $d_{ij}\times q_{ij}=\tau$.

Применение мультипликативной формы позволяет по виду функции, до проведения синтеза определить эффективность ее формульного представления. Количество ненулевых коэффициентов формы в этом случае равно максимальному количеству одинаковых значений функции, которое принимается за нуль алгебры.

Другим важным свойством мультипликативной формы является возможность управлять значениями коэффициентов. В частности, для произвольной дискретной функции может быть синтезирована форма, все коэффициенты которой имею значение τ, т.е. мультипликативная форма не будет содержать операций умножения.

Путем перестановки (задания другой нумерации) спектральных функций возможно получение форм, у которых спектральные функции, применяемые для представления, имеют наиболее простую реализацию.

Перечисленные свойства отличают мультипликативную форму от известных форм алгебры логики.

Литература

1. *Выхованец В.С.* Спектральные методы в логической обработке данных // Автоматика и телемеханика, 2001, № 10, с. 28-53.