Тез. докл. 2-ой Межд. конф. по проблемам управления. М., 2003. Т. 2. С. 108.

Факторизация полиномиальных форм

Выхованец В.С.
Институт проблем управления РАН, vyk@ipu.ru, Москва, Профсоюзная, 65

Произвольная дискретная функция f, зависящая от n переменных x_0, $x_1,\ldots,x_{n-1}$ со значностями k, представляется в виде спектрального разложения

$$f(x_0,x_1,...,x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{k^m-1}\theta_i(x_0,x_1,...,x_{m-1})\times a_i(x_m,x_{m+1},...,x_{n-1}), \qquad (1)$$

в некоторой алгебре образующих операций [1], где θ_i – спектральные функции, a_i – коэффициенты разложения, или, в матричном виде, $F = D\times A$, где F – матрица функции, D – квадратная матрица прямого преобразования, A – матрица коэффициентов. Выражение (1) описывает полиномиальные и неполиномиальные формы.

Поставим задачу поиска формульного представления полиномиальных спектральных функций в виде

$$\theta_i(x_0,x_1,...x_{m-1}) = x_0^{i_0}\circ_0 x_1^{i_1}\circ_1 ...\circ_{m-2} x_{m-1}^{i_{m-1}}, \qquad (2)$$

где $x_j^{i_j} = x_j \lozenge_j i_j$, $\lozenge_j$ – степенные операции, $\circ_j$ – соединительные операции, $i = (i_0 i_1 \ldots i_{m-1})_k$ – представление индекса i в позиционной системе счисления по основанию k. Процесс нахождения выражения (2) для функций θ_i, изначально заданных матрицей D, будем называть полиномиальной факторизацией. Так как

$$D = P_0 \otimes_0 P_1 \otimes_1 ...\otimes_{m-2} P_{m-1}, \qquad (3)$$

где P_j – матрица степенной операции для переменной x_j, $\otimes_j$ – операция кронекеровского произведения, выполняемая относительно операции $\circ_j$, то для факторизации используем следующее рекуррентное правило,

$$T_{m-1} = D, \quad T_j = T_{j-1}\otimes_{j-1} P_j, \ (j=\overline{m-1,1}), \quad P_0 = T_0. \qquad (4)$$

Основной операцией в (4) является представление матрицы $T=[t_{ij}]$ в виде кронекеровского произведения матриц L и R относительно операции $\circ$. Первоначально на каждом шаге (4) матрицы L, R и O определим так,

$$\begin{cases} L=[l_{uv}], & l_{uv} = v+uk \quad (u,v=\overline{0,k-1}); \\ R=[r_{sw}], & r_{sw} = w+sk \quad (s,w=\overline{0,k-1}); \\ O=[o_{pq}], & \qquad\qquad (p,q=\overline{0,k^2-1}). \end{cases} \qquad (5)$$

где O – искомая матрица операции $\circ$. Из определения кронекеровского произведения и (5) следует, что

$$o_{pq} = p\circ q = T(p_1k+q_1,\, p_0k+q_0),$$

где $T(i,j)=t_{ij}$, $p = p_1k+p_0$ и $q = q_1k+q_0$.

После получения матрицы O выполняем ее редукцию. Для чего строки и столбцы матрицы разбиваем на классы эквивалентности $\{R_0,R_1,...,R_{r-1}\}$ и $\{C_0,C_1,...,C_{c-1}\}$. Тогда все элементы $r\in R_i$ левой матрицы могут быть заменены на i, а все элементы $c\in C_j$ правой матрицы – на j. В результате получаем редуцированные матрицы L, O и R. Если в результате редукции размерность O не превосходит $k\times k$, то представление D в виде полиномиальных функций возможно. Тогда продолжаем вычисления по формуле (4).

Литература

1. *Выхованец В.С.* Спектральные методы в логической обработке данных // Автоматика и телемеханика, 2001, № 10, с. 28-53.