Доклады 4-й Международной конференции и выставки «Цифровая обработка сигналов и её применение». М., 2002. Т. 2. С. 255-258.

АДДИТИВНАЯ АЛГЕБРА В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Выхованец В.С.

Приднестровский государственный университет

Тирасполь, Республика Молдова, vyk@tirastel.md

1. Введение

Дискретные преобразования являются мощным средством исследования сигналов различной физической природы и эффективно используются в различных областях науки и техники [1]. Дискретные ортогональные преобразования задаются соотношениями вида:

$$\begin{cases} f(t) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \theta(t,i) \cdot a(i); \\ a(i) = \sum\limits_{t=0}^{m-1} \vartheta(i,t) \cdot f(t), \end{cases} \qquad \sum_{i=0}^{m-1} \theta(t,i) \cdot \vartheta(i,\tau) = \begin{cases} 1, t = \tau \\ 0, t \neq \tau \end{cases} \tag{1}$$

где $f(t)$ – отсчеты сигнала в дискретные моменты времени $t = \overline{0, m-1}$; $a(i)$ ($i = \overline{0, m-1}$) – спектр сигнала или коэффициенты разложения по системе спектральных функций (в базисе) $\left\{\theta(t,i), \vartheta(i,t) \,\middle|\, i,t = \overline{0, m-1}\right\}$; m – число отсчетов во временной (частотной) области. Для взаимно однозначного преобразования сигнала в спектр и обратно базисные функции должны быть ортогональны.

Выражения (1) также могут быть представлены в матричном виде:

$$\begin{cases} F = D \times A; \\ A = Q \times F, \end{cases} \qquad D \times Q = E, \tag{2}$$

где F (A) - выборка (спектр) сигнала, вектор-столбец длины m; D (Q) - матрица прямого (обратного) преобразования размерности $m \times m$; E - единичная матрица той же размерности.

Помимо условия ортогональности на базис дополнительно налагают ряд ограничений. Среди них – возможность факторизации, распознавание свойств сигнала по его спектру, эффективная вычислимость спектральных функций, и т.д.

Методологической основой цифровой обработки сигнала является, по сути, перенос достаточно сложной обработки сигнала во временной области в область частотную путем преобразований его спектра в некотором базисе, а противоположный подход используется для генерации сигналов с заданными свойствами. Поиск эффективных решений идет, как правило, в направлении создания соответствующих процедур в небольшом классе базисов [2, 3] – Фурье, Хартли, Уолша, Хаара, и т.д., что объясняется как простотой их формирования, так и их достаточной изученностью и наглядностью.

С другой стороны, для каждой процедуры обработки или распознавания нетривиальных свойств сигнала существует свой (оптимальный) базис, где поставленная задача имеет наиболее простое решение. Поиск таких базисов, очевидно, может идти в двух направлениях. При следовании в первом направлении ставится традиционная задача синтеза оптимального базиса в заданной алгебраической системе (в поле действительных или комплексных чисел, на кольце целых чисел или в поле Галуа). Второе направление связано с поиском алгебраических систем, где спектральные функции имеют наиболее эффективную реализацию. Заметим, что этот подход не мешает ставить и решать задачу поиска оптимальных базисов, но в другой арифметике. Этому подходу и посвящена настоящая работа.

2. Постановка задачи

Поставим задачу расширения спектра базисов ортогонального преобразования и поиска среди них таких, которые имеют эффективную техническую реализацию. Применение в цифровой обработке сигналов микропроцессорных средств позволяет расширить класс эффективно реализуемых функций. После дискретизации и квантования сигнал представляется своими выборочными значениями, задаваемыми с некоторой точностью во времени и по уровню. Это позволяет кодировать вычисляемые значения целыми числами, а саму функцию $\boldsymbol{f}$ рассматривать как дискретную.

Рассмотрим произвольное конечное множество элементов $\boldsymbol{N_k} = \{0, 1, \ldots, \boldsymbol{k}-1\}$. Зададим на $\boldsymbol{N_k}$ алгебраическую систему $\boldsymbol{R} = \langle \boldsymbol{N_k}, +, \cdot \rangle$ с двумя операциями, которые условно назовем сложением и умножением. При фиксированном $\boldsymbol{k} > 1$ найдем такие операции, которые позволяют разрешить систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\boldsymbol{i}=0}^{\boldsymbol{m}-1} \boldsymbol{a_{ji}} \cdot \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{b_j} \quad (\boldsymbol{j} = \overline{0, \boldsymbol{m}-1}) \tag{3}$$

относительно $\boldsymbol{x_i}$, где $\boldsymbol{a_{ji}}, \boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{b_j} \in \boldsymbol{N_k}$, или в матричном виде $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

Методы решения системы уравнений (3) находят широкое применение при цифровой обработке сигналов. В соответствии с (1) в качестве переменных $\boldsymbol{x_i}$ и свободных членов $\boldsymbol{b_j}$ выступают отсчеты сигнала или его спектр, а коэффициенты $\boldsymbol{a_{ji}}$ – значения прямых или обратных спектральных функции. В свою очередь вектор-столбец матрицы $\boldsymbol{A}$ есть характеристический вектор спектральной функции, а вся матрица $\boldsymbol{A}$ – набор спектральных функций, которые используются в дискретном преобразовании.

В работе [4] показано существование пяти дискретных алгебраических систем: алгебры логики, мультипликативной и аддитивной алгебры, конечного поля и кольца целых чисел. Для всех перечисленных алгебр для разрешимости системы (3) на значения коэффициентов $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ji}}$ (на вид и подбор спектральных функций) налагаются определенные ограничения.

Алгебра логики и мультипликативная алгебра позволяют реализовать узкий класс спектральных базисов, которые условно назовем пиковыми, так как каждая из спектральных функций отлична от нуля только в одной точке (на одном интервале). Эти базисы применяются, в основном, при проектировании дискретных устройств, где важна простота реализации. Аддитивная алгебра, конечное поле и кольцо целых чисел порождают широкий класс базисов, значительно превосходящий и включающий класс пиковых базисов.

Достаточно хорошо изучены спектральные представления в конечных полях и на кольце целых чисел. Исследуем возможность применения для цифровой обработки сигналов аддитивной алгебры.

3. Аддитивная алгебра

Пусть $\boldsymbol{R_A} = \langle \boldsymbol{N_k}, +, \cdot \rangle$ – алгебра, в которой существуют два элемента $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{N_k}$ и $\boldsymbol{\iota} \in \boldsymbol{N_k}$ ($\boldsymbol{\iota} \neq \boldsymbol{\sigma}$), такие, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\iota} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\iota}$ для всех $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{N_k}$. Элемент $\boldsymbol{\sigma}$ будем называть нулем, а $\boldsymbol{\iota}$ – единицей алгебры. Дополнительно потребуем, чтобы операция сложения образовывала коммутативную группу $\boldsymbol{G_A} = \langle \boldsymbol{N_k}, + \rangle$ на множестве $\boldsymbol{N_k}$ с нейтральным (нулевым) элементом $\boldsymbol{\sigma}$. Алгебру $\boldsymbol{R_A}$ будем называть аддитивной.

Определение 1. Циклическим порядком элемента $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G_A}$ называется такое натуральное минимальное число $\boldsymbol{c_a} > 0$, что циклическая сумма $\boldsymbol{c_a} \circ \boldsymbol{a} = \underbrace{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \ldots + \boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{c_a}} = \boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ – нейтральный элемент $\boldsymbol{G_A}$. Положим $0 \circ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sigma}$ и $(-\lambda) \circ \boldsymbol{a} = \lambda \circ (-\boldsymbol{a})$, где λ - целое число.

Определение 2. Циклическим порядком группы $\boldsymbol{G_A}$ называется минимальное значение порядков всех ее элементов, кроме нейтрального.

Лемма 1. Уравнение $\lambda \circ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ имеет единственное решение для всех $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G_A}$, если и только если $|\lambda| < \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ – циклический порядок группы $\boldsymbol{G_A}$.

Доклады 4-й Международной конференции и выставки «Цифровая обработка сигналов и её применение». М., 2002. Т. 2. С. 255-258.

Определение 3. Логической матрицей $\boldsymbol{L_m}$ называется квадратная матрица, состоящая из нулей и единиц аддитивной алгебры. Если заменить нули и единицы аддитивной алгебры на нули и единицы кольца целых чисел соответственно, то получим сопряженную ей матрицу $\hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{m}}$ той же размерности.

Теорема 2. Произвольная дискретная функция f может быть представлена в виде спектрального разложения (1) в алгебре $\boldsymbol{R_A}$, если $\boldsymbol{D}$ является логической матрицей $\boldsymbol{L_m}$, а модуль определителя сопряженной ей матрицы $\hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{m}}$ меньше циклического порядка группы $\boldsymbol{G_A}$. Тогда $\Delta \circ \boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}} \circ \boldsymbol{F}$, где $\overline{\boldsymbol{D}}$ – алгебраическое дополнение $\hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{m}}$, Δ – определитель $\hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{m}}$, а T – операция транспонирования матрицы.

Если $\boldsymbol{G_A}$ циклическая группа, то спектральное разложение ортогонально (т.е. существует матрица $\boldsymbol{Q}$), когда Δ является делителем числа, кратного ее порядку $\boldsymbol{k}$. В случае, если $|\Delta| = 1$ то для любой группы $\boldsymbol{G_A}$ имеет место $\boldsymbol{Q} = \Delta \circ \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}}$.

Заметим, что в аддитивной алгебре в качестве операций сложения можно использовать целочисленное сложение, сложение по модулю $\boldsymbol{k}$, поразрядную неэквиваленцию, а в качестве умножения – целочисленное умножение, поразрядную конъюнкцию и др. Для обеспечения замкнутости на множестве $\boldsymbol{N_k}$ поразрядных операций, $\boldsymbol{k}$ выбирается кратным степени 2.

4. Демонстрационный пример

Пусть операции сложения и умножения алгебры $\boldsymbol{R_A}$ заданы в виде матриц $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{P}$, состоящих их элементов $\boldsymbol{s_{ij} = i + j}$ и $\boldsymbol{p_{ij} = i \cdot j}$ соответственно:

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

где * – безразличное значение. Очевидно, что циклический порядок группы $\boldsymbol{G_A}$ равен двум, $\boldsymbol{\sigma} = 0$ и $\boldsymbol{\iota} = 3$. Приведенная в примере операция сложения может быть реализована как поразрядная неэквиваленция при представлении чисел в двоичной системе счисления, а в качестве операции умножения использована поразрядная конъюнкция. Обе эти операции имеют достаточно простую и эффективную техническую реализацию.

Выберем систему спектральных функций, заданную в виде матриц

Доклады 4-й Международной конференции и выставки «Цифровая обработка сигналов и её применение». М., 2002. Т. 2. С. 255-258.

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&0\\3&3&0&0&0&0\\3&3&3&0&0&0\\0&3&3&3&0&0\\0&0&3&3&3&0\\0&0&0&3&3&3\end{bmatrix},\ \overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\1&0&-1&1&0&0\\-1&1&0&-1&1&0\\0&-1&1&0&-1&1\end{bmatrix},\ \Delta=1.$$

Функции спектрального базиса легко могут быть получены сдвигом вправо, то есть путем использования соответствующей операции логического сдвига двоичного числа с числом разрядов, равным $\boldsymbol{m}$. Обратные спектральные функции являются трехуровневыми и также могут быть получены путем логического сдвига вправо. Из определения операции сложения видно, что $-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$. Отсюда следует, что в матрице $\overline{\boldsymbol{D}}$ знаки минус могут быть опущены. В результате получаем двухуровневую систему обратных спектральных функций. Так как $\Delta=1$, то базис является и ортогональным.

Особенностями приведенного выше спектрального базиса является простота его формирования, независимость от используемых операций сложения и умножения, а также простой физический смысл: первые две трети спектральные функций определяют фазочувствительную компоненту сигнала, а оставшаяся треть – составляющую сигнала, не чувствительную к фазе. Причем, чем больше номер спектральной компоненты, тем более узкие пики имеет нефазочувствительная составляющая, а чем больше ее спектральный коэффициент, тем меньше этот сигнал представим в виде спектра, задаваемого исходной гармоникой.

Тогда для сигнала, заданного характеристическим вектором $\boldsymbol{F}=[1,3,0,2,1,0]^{\boldsymbol{T}}$ имеем

$$\boldsymbol{A}=\overline{\boldsymbol{D}}^{\boldsymbol{T}}\circ\boldsymbol{F}=[1,2,3,3,1,2]^{\boldsymbol{T}}.$$

Выполнив низкочастотную фильтрацию, получаем спектр фазочувствительной составляющей сигнала $\widetilde{\boldsymbol{A}}=[1,2,3,3,0,0]^{\boldsymbol{T}}$, а после обратного преобразования – и сам сигнал $\widetilde{\boldsymbol{F}}=[1,3,0,2,0,3]^{\boldsymbol{T}}$.

5. Заключение

Аддитивная алгебра, как альтернативная алгебраическая система для цифровой обработки сигналов обеспечивает рад преимуществ по сравнению с такими алгебраическими системами как конечное поле, кольцо целых чисел и поле действительных чисел.

В частности, при разложении сигнала в базисах аддитивной алгебры спектральные функции легко реализуемы, так как являются двухуровневыми. Для выполнения процедур дискретного преобразования требуется вычислительное средство небольшого быстродействия и небольшой разрядности, с простой системой команд, так как не требуется реализация команд целочисленного умножения или умножения с плавающей запятой. Помимо всего прочего, при цифровой обработке сигналов в аддитивной алгебре сохраняется всей мощность аппарата дискретного ортогонального преобразования.

Список литературы

1. Пойда В.Н. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. – Мн., 1983.
2. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. - Новосибирск, 1983.
3. Залмазон Л.А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. - М., 1989.
4. Vykhovanets V.S. Algebraic systems for digital signal processing // Proceedings of Sixth International Conference “Pattern Recognition and Information Processing”. – Minsk, 2001. – Vol. 2, PP. 93-99.