Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 28-53.

УДК 519.712+681.323

© 2001 г. В. С. ВЫХОВАНЕЦ, канд. техн. наук
(Приднестровский государственный университет, Тирасполь)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЛОГИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ

Произвольная дискретная функция, имеющая аргументы с различной значностью, представляется в виде формулы в функционально полном базисе операций. Исследуются базисы, состоящие из двух алгебраических операций, фиксированного множества функций и функций, принадлежащих заданному классу. Показывается связь такого представления со спектральными разложениями. Обосновывается методика синтеза полиномиальных и неполиномиальных форм. Приводятся информационные и асимптотические оценки сложности получаемых формул.

1. Введение

Логическая обработка данных – самый распространенный метод вычислений, лежащий в основе современных вычислительных средств. Методы логической обработки данных нашли широкое применение в логическом управлении, цифровой обработке сигналов, распознавании образов, при проектировании дискретных устройств, и т.д.

Условно можно выделить два крайних подхода в реализации логических вычислений. Первый, когда преобразование входных данных в выходные осуществляется на основе нерегулярных представлений, и второй, когда вычисления осуществляются на основе регулярных (спектральных) форм.

Нерегулярные формы получают в результате декомпозиции дискретной функции общего вида. Так функция f от n переменных $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ на каждом шаге декомпозиции выражается как функция от других функций g и h, $f(X) = g(h(Y), Z)$, где Y, Z – подмножества X [1]. Различают однократную и многократную, итеративную и рекурсивную декомпозиции. Декомпозиция завершается, когда получено представление, реализуемое на уровне операционных возможностей вычислительного средства.

Декомпозицию общего вида принято рассматривать как комбинаторную задачу, связанную с перебором большого числа решений и, при больших размерностях задачи, практически нереализуемую [2]. Как правило, нерегулярная обработка представляется в алгоритмической форме. Теоретической базой при этом служат известные парадигмы анализа предметной области и методологии проектирования (синтеза) программных средств, а именно, логическая, функциональная, структурная, объектно-ориентированная и т.п.

Промежуточное положение между нерегулярными и регулярными формами занимают решающие диаграммы [3], являющиеся, по своей сути, графической формой представления логических программ [4]. Этот вид представления основан на разложении дискретной функции в алгебраической системе, образованной двумя операциями. Разложение осуществляется по функциям h_i одной или нескольких переменных Y: $f(X)=\sum h_i(Y)\cdot g_i(Z)$, где g_i – функции (коэффициенты разложения), зависящие от оставшейся части переменных Z, $Y \cap Z = \varnothing$. На следующем шаге разложению подлежат функции g_i (h_i), возможно в другой алгебраической системе и по другим функциям. Процесс повторятся до тех пор, пока в качестве коэффициентов не будут получены константы.

Регулярные формы основаны на крайнем случае разложения – спектральном представлении дискретной функции, когда $Y = X$ и $Z = \varnothing$,

$$f(X)=\sum_{i=0}^{m-1}\theta_i(X)\cdot a_i\,, \tag{1}$$

где a_i – коэффициенты разложения в базисе $\Omega=\{+,\cdot,\theta_i\ (i=\overline{0,m-1})\}$, θ_i – спектральные функции.

При спектральном представлении, куда отнесем и промежуточные формы, тип базиса Ω определяется образующими его алгебраическими операциями $\{+,\cdot\}$. Для булевых функций используется классический базис Буля [5] с операциями конъюнкция и дизъюнкция, базис Жегалкина [6] с операциями неэквиваленция и конъюнкция, арифметический базис [7, 8]. В k-значной логике применяются базисы с операциями максимум и минимум [9], сложением по модулю k и минимум [10], арифметическим сложением и поразрядными логические операциями [11], арифметическими операции на кольце целых чисел [12, 13], операциями конечных полей Галуа [14, 15].

Просматривается определенная методологическая связь между логической обработкой данных и цифровой обработкой сигналов (табл. 1) [16]. Отличие цифровой обработки сигналов от логической обработки данных заключается в различных постановках задач. В последнем случае основной задачей является минимизация дискретной функции с целью ее эффективного вычисления (реализации), в то время как при цифровой обработке сигналов основная задача – получение спектра сигнала для его эффективной обработки в спектральной области.

Таблица 1

Соответствие терминов и процедур

Цифровая обработка сигналов	Логическая обработка данных
Дискретный сигнал	Дискретная функция
Многомерный сигнал	Система дискретных функций
Вектор отсчетов сигнала	Характеристический вектор функции
Спектр сигнала	Вектор коэффициентов формы
Выбор базиса	Синтез аналитической конструкции
Оптимизация базиса	Минимизация формы
Сжатие сигнала	Минимизация функции
Генерация сигналов	Синтез форм
Представление сигнала спектром	Вычисление вектора коэффициентов
Восстановление сигнала по спектру	Кратные вычисления формы
Взаимное преобразование спектров	Взаимное преобразование форм
Обработка сигнала: свертка, корреляция, фильтрация	Операции над формами: композиция, преобразование

Наблюдаемое множество спектральных форм определяется многообразием аналитических конструкций спектральных функций, синтезируемых при условии обеспечения функциональной полноты базиса Ω и эффективной вычислимости θ_i. Поставим задачу обобщения и систематизации известных форм спектральной декомпозиции в широком классе базисов, задаваемых различным выбором, как операций сложения и умножения, так и спектральных функций. Класс операций, образующих базис Ω и соответствующий ему вид спектральных функций получим исходя из существования методов нахождения спектральных коэффициентов a_i при известных (заданных) значениях функции.

2. Дискретные функции и операции

Рассмотрим произвольную дискретную функцию f, зависящую от n переменных x_0, x_1, …, x_{n-1}. Будем считать, что функция принимает значения на множестве N_{k_f}, а переменные – на множествах N_{k_j} ($j=\overline{0,n-1}$), где N_k – конечное подмножество множества натуральных чисел, $N_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$. Это позволяет говорить о том, что функция имеет значность k_f, а переменные – значности k_j.

Для задания дискретной функции используем ее таблицу истинности с числом строк $m=k_0k_1\ldots k_{n-1}$ (табл. 2). Взаимно однозначное соответствие между значением i переменной $x\in N_m$ и значениями i_j переменных $x_j\in N_{k_j}$ установим путем представления числа i в n-разрядной позиционной системе счисления с основаниями, задаваемыми значностями переменных:

(2) $$i = (i_{n-1},\ \ldots,\ i_1,\ i_0)_{k_{n-1}\ldots k_1 k_0} = (i_{n-1},\ \ldots,\ i_1,\ i_0)_m,$$

где $i_j \in N_{k_j}$ – j-я цифра представления числа i в позиционной системе счисления по основаниям ($k_{n-1},\ldots,k_1,k_0$), причем цифра i_0 имеем наименьший вес.

Таблица 2

Таблица истинности дискретной функции

x_{n-1}	...	x_1	x_0	$f(x)$
0	...	0	0	$f(0)$
0	...	0	1	$f(1)$
...	...	...	...	...
0	...	0	k_0-1	$f(k_0-1)$
0	...	1	0	$f(k_0)$
...	...	...	...	...
i_{n-1}	...	i_1	i_0	$f(i)$
...	...	...	...	...
$k_{n-1}-1$	...	k_1-1	k_0-1	$f(m-1)$

Будем различать многозначную и k-значную логику. В многозначной логике функции и переменные принимают значения на произвольных множествах значений, т.е. имеют различную значность; в то время как в k-значной логике переменные и функции имею одинаковую значность, равную k. Очевидно, что k-значная логика является частным случаем многозначной.

Определение 1. Под m-функцией будем понимать дискретную функцию значности k_f, задаваемую характеристическим вектором $[f(0)\,f(1)\ldots f(m-1)]$ длины m, $f(i) \in N_{k_f}$.

Теорема 1. Количество m-функций значности k_f равно N_f,

(3) $$N_f(k_f, m) = N_x(m)\,k_f^m,$$

где $N_x(m)$ – количество представлений числа m в виде произведения натуральных чисел, больших 1.

Доказательство. При фиксированном m имеем k_f^m различных характеристических векторов. Каждый характеристический вектор, в свою очередь, определяет $N_x(m)$ функций, различающихся значностями переменных. В итоге общее количество дискретных функций (m-функций) равно $N_f(k_f, m)$. ■

Из выражения (3) видно, что количество функций многозначной логики превосходит количество функций k-значной логики. Это позволяет одну и ту же логическую обработку данных (m-функцию) представить большим числом способов, отличающихся различным разбиением массива входных данных на части (переменные).

При логической обработке преобразование входных данных в выходные происходит путем выполнения унарных, бинарных, тернарных, и т.д., r-арных операций. Очевидно, что если результат r-арной операции не зависит от значений одного из операндов, то такую операцию следует рассматривать как $(r-1)$-арную.

Определение 2. Под дискретной операцией будем понимать дискретную функцию, существенно зависящую от своих переменных.

Теорема 2. Количество дискретных операций значности k над n переменными со значностями k_j ($j=\overline{0,n\text{-}1}$) равно N_o,

$$N_o(k,k_0,\ldots,k_{n-1})=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{j=1}^{C_n^i}k^{k_{j_1}k_{j_2}\ldots k_{j_{n-i}}}, \tag{4}$$

где C_n^i – число сочетаний из n по i; k_{j_1}, k_{j_2}, ..., $k_{j_{n-i}}$ пробегают все возможные сочетаний из n элементов k_0, k_1, ..., k_{n-1} по $n-i$.

Доказательство. Произвольная константа (переменная) является нульместной операцией. Количество таких операций k. Произвольный вектор длиной k_0 задает одноместную операцию значности k, если элементы этого вектора не одно и то же число. Количество таких операций $k^{k_0}-k$. Произвольная матрица размером $k_1\times k_0$ определяет двуместную операцию, если все строки и столбцы этой матрицы не одинаковы. Количество таких матриц $k^{k_0k_1}-k^{k_1}-k^{k_0}+k$. Тернарная операция представляется характеристическим вектором длиной $k_0k_1k_2$ или трехмерной таблицей, такой, что составляющие ее двумерные таблицы не одинаковы. Число таких трехмерных таблиц равно $k_f^{k_0k_1k_2}-k_f^{k_0k_1}-k_f^{k_0k_2}-k_f^{k_1k_2}+k_f^{k_0}+k_f^{k_1}+k_f^{k_2}-k_f$. Далее индукцией по числу переменных убеждаемся в справедливости формулы (4). ■

В k-значной логике формула (4) принимает более простой вид:

$$N_o(k)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^ik^{k^{n-i}}. \tag{5}$$

3. Алгебра образующих операций

Рассмотрим алгебраическую систему $R=\langle N_k,+,\cdot\rangle$, образованную двумя бинарными k-значными операциями, которые условно назовем сложением и умножением. Представим m-функцию $f(x)$ ($x=\overline{0,m-1}$) значности $k_f\le k$ зависящей от двух переменных x' и x'' со значностями k' и k'', т.е. $m=k'k''$. Если m – простое число (не представляется в виде произведения двух чисел), увеличим m и доопределим функцию в образовавшихся точках. Разложим функцию f в алгебре R по системе k'-функций $\theta_i(x')$ ($i=\overline{0,k'-1}$):

(6) $$f(x',x'')=\sum_{i=0}^{k'-1}\theta_i(x')\cdot a_i(x''),$$

где a_i – коэффициенты разложения (некоторые k''-функции). При подстановке в (6) значений переменной $x'=\overline{0,k'-1}$ получаем систему алгебраических уравнений

(7) $$\begin{cases} f(0,x'') &= \theta_0(0)\cdot a_0(x'') &+\ldots+ & \theta_{k'-1}(0)\cdot a_{k'-1}(x''); \\ f(1,x'') &= \theta_0(1)\cdot a_0(x'') &+\ldots+ & \theta_{k'-1}(1)\cdot a_{k'-1}(x''); \\ \hdashline f(k'-1,x'') &= \theta_0(k'-1)\cdot a_0(x'') &+\ldots+ & \theta_{k'-1}(k'-1)\cdot a_{k'-1}(x''), \end{cases}$$

из которой требуется найти a_i ($i=\overline{0,k'-1}$). В матричной записи это выглядит так:

(8) $$F=D\times A \qquad (A=Q\times F),$$

где F (A) – матрица функции (коэффициентов) размерности $k'\times k''$, D (Q) – квадратная матрица прямого (обратного) преобразования размерности $k'\times k'$ с элементами $d_{ij}=\theta_i(j)$ $(q_{ij}=\vartheta_i(j))$, принадлежащими N_k.

Определение 3. Система функций θ_i называется фундаментальной, если сложение и умножение функций для всех значений переменных коммутативно, ассоциативно и выполняется закон дистрибутивности умножения функций относительно сложения, т.е. при $*\in\{+,\cdot\}$, для любых i,j,t и всех x,y,z

$$\theta_i(x)*\theta_j(y)=\theta_j(y)*\theta_i(x),\ \ \theta_i(x)*\{\theta_j(y)*\theta_t(z)\}=\{\theta_i(x)*\theta_j(y)\}*\theta_t(z),$$
$$\theta_i(x)\cdot\{\theta_j(y)+\theta_t(z)\}=\theta_i(x)\cdot\theta_j(y)+\theta_i(x)\cdot\theta_t(z).$$

По своей сути фундаментальные функции являются всевозможными гомоморфизмами множества N_k на свое подмножество, на котором сложение и умножение коммутативно и ассоциативно, а умножения дистрибутивно относительно сложения.

Определение 4. Матрица прямого преобразования D называется невырожденной, если система уравнений (7) разрешима относительно a_i единственным образом.

Определение 5. Преобразование (8) называется ортогональным, если для каждой невырожденной матрицы D существует такая матрица Q, что в алгебре R имеет место выражение $A=Q\times F$. Построение матрицы Q по заданной матрице D будем называть обращением D и обозначать унарной матричной операцией μ: $Q=\mu D$.

Из (7) видно, что столбцы D являются характеристическими векторами спектральных функций θ_i. В свою очередь столбцы Q можно рассматривать как характеристические вектора функций ϑ_i, ортогональных θ_i в указанном смысле. Существует несколько типов алгебр, позволяющих разрешить систему (7) относительно a_i.

3.1. Алгебра логики

Рассмотрим алгебру $R_L = \langle N_k, +, \cdot \rangle$. Потребуем существование таких элементов σ и $\tau \neq \sigma$, что $a + \sigma = a$, $\sigma + a = a$ и $\sigma \cdot a = \sigma$, $\tau \cdot a = \tau$ для всех $a \in N_k$. Элемент σ называется нулем, а τ – единицей алгебры.

Определение 6. Матрицей перестановок $P_{k'}$ порядка k' называется квадратная матрица, состоящая из нулей и единиц, имеющая в каждой строке (столбце) ровно по одной единице.

Теорема 3. Произвольная функция f представима в R_L разложением (6), если D является матрицей перестановок. Тогда $Q = D^T$ и $Q \times D = E$, где E – единичная матрица, T – операция транспонирования.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что система (7) принимает вид $f(i, x'') = a_j(x'')$ ($i = \overline{0, k'-1}$), а j таково, что $d_{ij} = \tau$. Переупорядочим строки полученной системы уравнений в соответствии с естественной нумерацией коэффициентов a_j. Тогда $a_i(x'') = f(j, x'')$ ($i = \overline{0, k'-1}$), а j таково, что $q_{ji} = d_{ij} = \tau$. Откуда находим $Q = D^T$ и $Q \times D = E$. ■

Произвольную матрицу $D = P_{k'}$ можно задать перестановкой $\alpha = (\alpha_0\ \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1})$ элементов $\alpha_i \in N_{k'}$. Нетрудно проверить, что $P_{k'}$ задает фундаментальную систему функций. Количество таких систем в алгебре R_L (или количество различных представлений функции f) ровно $N_L(k') = k'!$.

Пример 1. Пусть операции сложения и умножения – любые из операций, задаваемые матрицами S и U с элементами $s_{ij} = i + j$ и $u_{ij} = i \cdot j$ соответственно:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \\ 3 & * & * & * \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

где * – безразличное значение, т.е. в месте * может находиться произвольный элемент N_4. Видно, что $\sigma = 0$ и $\tau = 3$. Представим функцию f значности $k_f = k = 4$, заданную характеристическим вектором $F = [3\,0\,1\,2\,2\,1]$, зависящей от переменных x' и x' со значностями $k' = 3$ и $k'' = 2$ (табл. 3).

Таблица 3

x''	x'	$f(x',x'')$
0	0	3
0	1	0
0	2	1
1	0	2
1	1	2
1	2	1

Тогда из (6) следует

$$f(x',x'')=\theta_0(x')\cdot a_0(x'')+\theta_1(x')\cdot a_1(x'')+\theta_2(x')\cdot a_2(x'').$$

Задав перестановку $\alpha=(2\,0\,1)$ элементов N_3, получим

$$D=\begin{bmatrix}\theta_0(0) & \theta_1(0) & \theta_2(0)\\ \theta_0(1) & \theta_1(1) & \theta_2(1)\\ \theta_0(2) & \theta_1(2) & \theta_2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&3\\3&0&0\\0&3&0\end{bmatrix},\ D'=\begin{bmatrix}0&3&0\\0&0&3\\3&0&0\end{bmatrix},$$

$$A=D'\times\begin{bmatrix}f(0,x'')\\ f(1,x'')\\ f(2,x'')\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a_0(x'')\\ a_1(x'')\\ a_2(x'')\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&0\\0&0&3\\3&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&2\\0&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\1&1\\3&2\end{bmatrix},$$

$$f(x',x'')=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}(x'')+\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(x'')+\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}(x''),$$

где $[y_i](x)=y_x$ – унарная операция, задаваемая характеристическим вектором $[y_i]$. ■

Заметим, что в R_L на множестве $B=\{\sigma,\tau\}$ с точностью до автоморфизма существуют две алгебраические подсистемы: булева алгебра $B_L=\langle B,\vee,\&\rangle$ (если $\tau+\tau=\tau$), или поле Жегалкина $P_L=\langle B,\oplus,\&\rangle$ (если $\tau+\tau=\sigma$), где $\vee$, $\&$ и $\oplus$ – соответственно булевы операции дизъюнкции, конъюнкции и неэквиваленции. Можно показать, что если R_L включает B_L или P_L, то произвольная матрица из нулей и единиц образует фундаментальную систему функций.

Для представления функций в алгебре R_L в качестве сложения могут использоваться такие операции как сложение по модулю k, максимум, поразрядная дизъюнкция и неэквиваленция, а в качестве умножение – умножение по модулю k, минимум, поразрядная конъюнкция [9, 11]. Для обеспечения замкнутости поразрядных операций на множестве N_k, k выбирается равным степени 2 (степени простого числа).

3.2. Мультипликативная алгебра

Определим алгебру $R_M=\langle N_k,+,\cdot\rangle$, у которой операции удовлетворяют условиям алгебры R_L, а умножение дополнительно образует группу $G_M=\langle N_k\setminus\{\sigma\},\cdot\rangle$ на множестве N_k за исключением нулевого элемента σ. Последнее означает, что для любого элемента $\boldsymbol{G_M}$ существует обратный ему элемент, такой, что $\boldsymbol{d_i} \cdot \boldsymbol{d_i^{-1}} = \boldsymbol{\iota}$.

Определение 7. Мономиальной матрицей $M_{k'}$ порядка k', называется квадратная матрица, получаемая перестановкой строк (столбцов) диагональной матрицы $diag(d_0, d_1, \ldots, d_{k'-1})$ с элементами $d_i \neq \sigma$, $d_i \in N_k$.

Теорема 4. Произвольная функция f представима в R_M разложением (6), если D является мономиальной матрицей. Тогда $Q = \widetilde{D}^T$ и $Q \times D = E$, а $\widetilde{D}$ получается из D заменой ненулевых элементов на обратные в группе G_M.

Доказательство. Из (7) получаем $f(i, x'') = d_{ij} \cdot a_j(x'')$ $(i = \overline{0, k'-1})$, $d_{ij} \neq \sigma$. Используя свойства умножения, найдем a_j и переупорядочим строки системы, что в итоге дает $a_i(x'') = q_{ij} \cdot f(j, x'')$, где $q_{ij} = d_{ji}^{-1}$. Откуда $Q = \widetilde{D}^T$ и $Q \times D = E$. ■

Нетрудно показать, что в R_M количество представлений произвольной функции $N_M = k'!(k-1)^{k'}$, а система спектральных функций, задаваемых матрицей $M_{k'}$ фундаментальна, если умножение коммутативно на N_k.

Пример 2. Представим операции сложения и умножения матрицами

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \\ 3 & * & * & * \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда для функции f из примера *1* имеем

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f(x', x'') = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}(x') \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x'') + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x') \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x'') + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x') \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x''). \blacksquare$$

В мультипликативной алгебре с точностью до изоморфизма применим базис, включающий операции сложение (максимум) и умножение по модулю k, где k – простое число.

Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 28-53.

3.3. Аддитивная алгебра

Пусть $R_A = \langle N_k, +, \cdot \rangle$, где операции сложения и умножения удовлетворяют условиям алгебры A_L, а сложение таково, что образует коммутативную группу $G_A = \langle N_k, + \rangle$. В дальнейшем нам потребуется следующие определения и лемма.

Определение 8. Порядком элемента a группы G_A называется такое минимальное натуральное число $c_a > 0$, для которого циклическая сумма

$$c_a \circ a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{c_a} = \sigma$$

где σ нейтральный (нулевой) элемент группы. Положим $0 \circ a = \sigma$ и $(-\lambda) \circ a = \lambda \circ (-a)$ для любого $a \in N_k$ и $\lambda \in Z$, Z – множество целых чисел.

Определение 9. Циклическим порядком группы G_A будем называть минимальное значение порядков всех ее элементов кроме нейтрального.

Циклический порядок группы равен наименьшему простому числу (кроме единицы), являющемуся делителем ее порядка k, т.е. порядку наименьшей циклической подгруппы группы G_A (теорема Коши).

Лемма 5. В произвольной группе G_A уравнение вида $\lambda \circ a = b$, где $\lambda \in Z$, $a, b \in N_k$, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда циклический порядок c группы больше $|\lambda|$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для всех $a \in N_k$ и при фиксированном $|\lambda| < c$ элементы $\lambda \circ a$ различны. Предположим, что это не так. Тогда имеются такие элементы $a' \neq a''$, что $\lambda \circ a' = \lambda \circ a''$. Отсюда следует $\lambda \circ (a' - a'') = \sigma$. Последнее означает, что элементы a' и a'' совпадают. Приходим к противоречию, которое доказывает лемму. ■

Определение 10. Логической матрицей $L_{k'}$ порядка k', называется квадратная матрица, состоящая из нулей и единиц алгебры R.

Определение 11. Сопряженной логической матрицей $\widehat{L}_{k'}$ порядка k', называется логическая матрица $L_{k'}$, у которой нули и единицы алгебры R заменены на нули и единицы кольца целых чисел.

Рассмотрим в R_A систему спектральных функций, принимающих значения на множестве $B = \{\sigma, \tau\}$. Тогда D состоит из нулей и единиц алгебры и (7) преобразуется в систему уравнений

(9) $$f(i, x'') = \sum_{(d_{ij} \neq \sigma)} a_j(x'') \cdot (i = \overline{0, k'-1}).$$

Очевидно, что эквивалентными преобразованиями уравнений (9) в группе G_A являются перестановки строк, замена строки на строку из противоположных элементов, замена строки на ее сумму с произвольной строкой. Отсюда следует, что a_j принадлежат линейному пространству над кольцом целых чисел, у которого сложение элементов задается групповой операцией, а умножение элемента a на число λ есть циклическая сумма $\lambda \circ a$. Из линейной алгебры известно (формулы Крамера), что решением системы (9) являются такие a_j, которые удовлетворяют уравнениям

(10) $$\Delta \circ a_j = \sum_{i=0}^{k'-1} \Delta_{ij} \circ f(i, x'') = \Delta_j \ (j = \overline{0, k'-1}),$$

где Δ – определитель матрицы коэффициентов $\hat{D} = [\hat{d}_{ij}]$, $\hat{d}_{ij} \in \{0, 1\}$; Δ_{ij} – алгебраическое дополнение элемента $\hat{d}_{ij}$; Δ_j определитель, получаемый из $\hat{D}$ заменой j-го столбца вектором свободных членов. В силу леммы *5* уравнения (10) имеют решения, если $|\Delta| < c$, где c – циклический порядок группы G_A. Нами доказана

Теорема 6. Произвольная функция f представима в R_A разложением (6), если D является логической матрицей, а определитель сопряженной ей матрицы $\hat{D}$ не равен нулю и меньше циклического порядка группы по сложению. Тогда $\Delta \circ A = \overline{D}^T \circ F$, где $\overline{D}$ – матрица алгебраических дополнений $\hat{D}$, вычисленная на кольце целых чисел.

Если G_A циклическая группа, то разложение (6) ортогонально, когда Δ является делителем числа, кратного ее порядку k. В этом случае уравнение $\Delta \circ a = b$ имеет единственное решение $a = (qk/\Delta) \circ b$, $q \in Z$, и на кольце целых чисел может быть вычислена матрица $Q = (qk/\Delta)\overline{D}^T$. В случае, когда $|\Delta| = 1$, то для любой группы G_A имеем $Q = \Delta\overline{D}^T$. Так как R_A является частным случаем алгебры логики R_L, то для фундаментальности произвольной матрицы из нулей и единиц необходимо потребовать, чтобы $\tau + \tau = \tau$ или $\tau + \tau = \sigma$.

Заметим, что операция умножения R_A применяется только при вычислениях функции. Для получения коэффициентов разложения используется операция циклической суммы, задаваемая группой G_A.

Пример 3. Определим операции сложения и умножения матрицами

$$S=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ *&*&*&*\\ *&*&*&*\\0&1&2&3\end{bmatrix}.$$

Циклический порядок группы G равен 2. Для функции из примера *1* получим

$$D=\begin{bmatrix}3&3&0\\3&0&3\\0&3&0\end{bmatrix},\ \widehat{D}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\ \Delta=-1,\ \overline{D}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix},$$

$$\Delta\circ A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}3&2\\0&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\2&2\\1&2\end{bmatrix},\ A=-\begin{bmatrix}2&3\\2&2\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\2&2\\1&2\end{bmatrix},$$

$$f(x',x'')=\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}(x'')+\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}(x'')+\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}(x'').\ \blacksquare$$

В рамках аддитивной алгебры возможно использование образующих операций сумма по модулю k (поразрядная неэквиваленция) и умножение по модулю k (минимум, поразрядная конъюнкция). Как и ранее, для поразрядных операций k должно быть равно степени 2.

3.4. Конечное поле

Пусть $R_P=\langle N_k,+,\cdot\rangle$, где операции сложения и умножения образуют поле на множестве N_k и, тем самым, удовлетворяют условиям алгебр R_L, R_M и R_A одновременно. Широко известна следующая теорема.

Теорема 7. Функция f представима в R_P разложением (6), если D состоит из элементов N_k и определитель D в поле R_P отличен от нуля. Тогда $Q=D^{-1}$ и $Q\times D=E$, где D^{-1} – матрица, обратная D.

Также известно, что конечное поле R_P, задаваемое с точность до изоморфизма, существует при $k=p^q>1$, где p – простое число, q – натуральное число [18], а количество обращаемых матриц размерности $k'\times k'$ (или количество спектральных представлений) в таком поле равно N_P [19],

$$N_P=k^{k'(k'-1)/2}\prod_{i=1}^{k'}\left(k^i-1\right). \qquad (11)$$

При $k=2$ из (11) получаем количество представлений функции в аддитивной алгебре R_A. Заметим, что любая матрица с элементами из N_k является фундаментальной, а все невырожденные матрицы – ортогональны.

Пример 4. На множестве N_4 операции

$$S=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&3&1\\0&3&1&2\\0&1&2&3\end{bmatrix}$$

образуют поле. Для ранее определенной функции имеем

$$D=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&2\\1&0&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&2\\0&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\\2&0\end{bmatrix},$$

$$f(x',x'')=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}(x'')+\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}(x'')+\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}(x'').\ \blacksquare$$

Разложение дискретных функций в конечных полях (полях Галуа) получило широкое распространение на практике [14, 15].

3.5. Целостное кольцо

Теорема *7* справедлива на целостном кольце R_K (коммутативном кольце с единицей и без делителей нуля). При конечном числе элементов кольцо R_K изоморфно конечному полю [18]. Пусть $R_K=\langle Z,+,\cdot\rangle$, где Z – множество целых чисел. Тогда решение системы (7) записывается в виде $\dot a_j=\Delta\cdot a_j=\Delta_j$ ($j=\overline{0,k'-1}$). По построению $f\in N_{k_f}\subset Z$. Отсюда определитель системы Δ является делителем спектральной суммы и

$$f(x',x'')=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=0}^{k'-1}\theta_i(x')\cdot\dot a_i(x''). \tag{12}$$

Определим разрядность вычислительного устройства, требуемую для вычисления функции f. Пусть заданы произвольные матрицы D, F и известно, что элементы D по модулю меньше или равны некоторому числу d, а значения функции меньше $k_f\in N$. Тогда из известной формулы для определителя матрицы находим, что $|\Delta_j|$ не превосходит $(k_f-1)k'd^{k'-1}$, а текущее значение модуля спектральной суммы при вычислении выражения (12) меньше N_R,

$$N_R(d,k',k_f)=\frac{1}{2}k'd(k_f-1)k'd^{k'-1}=\frac{1}{2}(k_f-1)k'^2d^{k'}.$$

Таким образом, при p-ичном кодировании данных вычислительному средству требуется оперировать не более чем R разрядами, $R=\left]\log_p 2N_R\right[$, где $]x[$ – наименьшее целое, превосходящее x.

Пример 5. На кольце целых чисел для функции из примера *1* имеем

$$D=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix},\ \Delta=-5,\ A'=\begin{bmatrix}2 & 5 & -4\\ 5 & 5 & -5\\ -1 & -5 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 10\\ 10 & 15\\ -1 & -10\end{bmatrix},$$

$$f(x',x'')=-\frac{1}{5}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}2\\10\end{bmatrix}(x'')+\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}10\\15\end{bmatrix}(x'')+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}(x')\cdot\begin{bmatrix}-1\\-10\end{bmatrix}(x'')\right).\ \blacksquare$$

На кольце целых чисел известно представление дискретных функций в арифметических формах [12, 13].

3.6. Функциональная полнота

По своей сути разложение (6) позволяет свести вычисление произвольной m-функции f к вычислению функций θ_i и a_i меньшей сложности (с меньшей длиной характеристического вектора), а теоремы разложения определяют условия, при которых базис $\Omega=\{+,\cdot,\{\theta_i\},\langle a\rangle\}$ обладает функциональной полнотой, где $\{\theta_i\}$ фиксированный набор k'-функций, а $\langle a\rangle$ – класс, включающий все k''-функции. В предельном случае, когда $k'=m$, получаем спектральное представление, у которого класс $\langle a\rangle$ состоит из констант алгебры образующих операций.

В последнем случае m-функция выражается через m спектральных функций θ_i с той же длиной характеристического вектора. С технической точки зрения такой подход оправдан, если эффективность вычисления (реализации) θ_i достаточно высока. Поэтому поставим задачу нахождения классов спектральных функций, которые имеют эффективное (компактное) представление. Для этого рассмотрим произвольную k'-функцию зависящей от n переменных, возможно с различными значностями.

4. Полиномиальные формы

Наиболее изучены полиномиальные функции, имеющие однородную аналитическую конструкцию [20]:

(13) $$\theta_i(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})=x_0^{i_0}\delta_0 x_1^{i_1}\delta_1\ldots\delta_{n-2}x_{n-1}^{i_{n-1}}\delta_{n-1}c_i\ \ (\boldsymbol{i}=\overline{0,\boldsymbol{k'}-1}),$$

где c_i – произвольные константы; δ_j – функции двух переменных, $i=(i_{n-1}\ldots i_0)_{k'}$ – представление числа i в системе счисления (2); $x_j^{i_j}=x_j\gamma_j i_j$, γ_j – степенные функции, задаваемые для каждой переменной в отдельности. Зададим порядок вычисления выражения слева на право при приоритетном выполнении функций $\boldsymbol{\gamma_j}$ по отношению к $\boldsymbol{\delta_j}$. В свою очередь константы $\boldsymbol{c_i}$ будем рассматривать как результат вычисления некоторой фиктивной степенной операции над фиктивной переменной .

Определение 12. Бинарная операция γ называется существенной в области $N_0 \times N_1$, если для всех $x_0 \neq y_0$, $x_0, y_0 \in N_0$, существует $z_1 \in N_1$, что $x_0 \, \gamma \, z_1 \neq y_0 \, \gamma \, z_1$, и для всех $y_1 \neq z_1$, $y_1, z_1 \in N_1$, существует $x_0 \in N_0$, для которого $x_0 \, \gamma \, y_1 \neq x_0 \, \gamma \, z_1$.

Теорема 8. Для представления произвольной дискретной функции в полиномиальной форме необходимо, чтобы функции γ_j ($j = \overline{0, n-1}$) были существенными операциями в области $\boldsymbol{N_{k_j}} \times \boldsymbol{N_{k_j}}$, а δ_l ($l = \overline{0, n-1}$) – операциями в области значений γ_l и γ_{l+1}.

Доказательство. Очевидно, что существенность операции является более сильным свойством, чем существенная зависимость функции от переменных. Поэтому достаточно рассмотреть невыполнение условий существенности. Предположим, что первое условие существенности не выполняется для операции γ_r. Тогда существуют $y_r \neq z_r$, что $y_r \gamma_r i_r = z_r \gamma_r i_r$ для всех i_r. Рассмотрим полиномиальные функции

$$\theta_i(x) = \{[(x_0 \gamma_0 i_0)\delta_0 \ldots \delta_{r-1}(x_{r-1}\gamma_{r-1}i_{r-1})]\delta_r(x_r \gamma_r i_r)\}\delta_{r+1} \ldots \delta_{n-1} c_i \,,$$

при $x = y$ и $x = z$, $y \neq z$. Представим y и z в системе счисления (2)

$$y = (y_{n-1} \ldots y_r \ldots y_1 \; y_0)_{k_{n-1} \ldots k_1 k_0}, \qquad z = (z_{n-1} \ldots z_r \ldots z_1 \; z_0)_{k_{n-1} \ldots k_1 k_0} .$$

Пусть все цифры y и z одинаковы, кроме y_r и z_r. Тогда, каковы бы ни были функции δ_l, $\theta_i(y) = \theta_i(z)$ для всех i. Последнее означает, что существуют строки матрицы D, равные между собой. Во всех алгебрах образующих операций это приводит к вырожденной матрице дискретного преобразования.

Предположим теперь, что функция δ_r не зависит от первой переменной. Тогда все полиномиальные функции не зависят от переменных x_0, …, x_{r-1} и матрица D вырождается. Аналогично показывается необходимость второго условия существенности для γ_r и зависимость δ_r от второй переменной.

Присутствие в (13) операции δ_{n-1} и констант c_i эквивалентно унарной операции $\gamma^{(i)}(x) = x \delta_{n-1} c_i$, задаваемой для каждой полиномиальной функции θ_i. Это позволяет использовать в аддитивной алгебре, конечном поле (целостном кольце) спектральную функцию, полиномиальная часть которой всюду равна нулю. В этом случае $\gamma^{(i)}$ преобразует нулевое значение в $\gamma^{(i)}(\sigma) \neq \sigma$. ■

Очевидно, что матрица несущественной операции содержит не менее двух одинаковых строк (столбцов). Теорема (*8*) утверждает, что матрицы степенных операций не должны содержать двух одинаковых строк (столбцов), а матрицы δ_r – содержать хотя бы один столбец (строку), отличающийся от других столбцов (строк).

4.1. Синтез полиномиальных форм

Синтез полиномиальной формы сводится к построению матрицы D с учетом вида аналитической конструкции спектральных функций и нахождению вектора коэффициентов A для каждого характеристического вектора F. Обобщим методику синтеза таких форм [20] в произвольной алгебре образующих операций R. Структура выражения (13) позволяет использовать при построении D операцию кронекеровского произведения матриц.

Определение 13. Пусть заданы двуместная операция δ и две матрицы $A=\lfloor a_{i_0 j_0}\rfloor$ размерности $n_0 \times m_0$ и $B=\lfloor b_{i_1 j_1}\rfloor$ размерности $n_1 \times m_1$. Кронекеровским произведением матрицы A на матрицу B относительно операции δ называется матрица $C = A \otimes_\delta B$ с элементами $c_{ij} = a_{i_0 j_0} \delta\, b_{i_1 j_1}$, где $i=(i_1\ i_0)_{n_1 n_0}$, $j=(j_1\ j_0)_{m_1 m_0}$ – представление индексов i и j в системе счисления (2).

Из определения *13* непосредственно следует, что C является блочной матрицей, состоящей из $n_1 \times m_1$ подматриц $C_{i_1 j_1} = A\,\delta\, b_{i_1 j_1}$ размерности $n_0 \times m_0$. Заметим, что кронекеровское произведение можно определить и так: $C_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0}\ \delta\, B$. В первом случае операцию будем называть левой и обозначать $\otimes$ или $\overleftarrow{\otimes}$, во втором – правой и обозначать $\overrightarrow{\otimes}$. Очевидно $A \overleftarrow{\otimes} B \neq A \overrightarrow{\otimes} B$. Правое кронекеровское произведение еще известно как прямое (внешнее) произведение матриц [21, с. 395].

С учетом определения *13* матрицу D получаем по рекуррентному правилу:

(14) $$D_0 = \Gamma_0,\ D_{j+1} = D_j \otimes_{\delta_j} \Gamma_{j+1}\ \ (j=\overline{0,n-2}),\ D = D_{n-1}\delta_{n-1}C,$$

где Γ_j – матрица степенной операции γ_j; C – матрица констант, состоящая из k' одинаковых строк k' произвольных констант. Для ортогональных разложений Q вычисляем обращением D в алгебре R, $Q = \mu D$.

При синтезе значности переменных и операций должны быть согласованы. В табл. 4 приведены ограничения на значности операций, выполняемые с граничными условиями $k^{(\gamma_0)} \le k_0^{(\delta_0)}$ и $k^{(\delta_{n-1})} \ge k$, где $k_0^{(*)}$, $k_1^{(*)}$ и $k^{(*)}$ – соответственно значность левого, правого операнда и значность операции *, k_j –значность переменной x_j, k – значность алгебры образующих операций.

Таблица 4

Условия согласования значностей

Операции	$k_0^{(*)}$	$k_1^{(*)}$	$k^{(*)}$
γ_j	$k_0^{(\gamma_j)} \ge k_j$	$k_1^{(\gamma_j)} \ge k_j$	$k^{(\gamma_j)} \le k_1^{(\delta_{j-1})}$
δ_j	$k_0^{(\delta_j)} \ge k^{(\delta_{j-1})}$	$k_1^{(\delta_j)} \ge k^{(\gamma_{j+1})}$	$k^{(\delta_j)} \le k_0^{(\delta_{j+1})}$

Пример 6. Представим функцию из примера *1* в полиномиальной форме. При разложении функции в мультипликативной алгебре (пример *2*) операция δ_1 может быть опущена. Оставшиеся операции определим так

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ \delta_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$D = \Gamma_0 \otimes_0 \Gamma_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\ Q = \mu D = \widetilde{D}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

и $A = Q \times F = [1\,1\,1\,3\,1\,0]^T$. ■

Из примера *6* видно, что для полиномиального представления функции в мультипликативной алгебре необходимо, чтобы операции γ_j представлялись матрицами, изоморфными мономиальной, т.е. $\Gamma_j = \beta_j(M_{k_j})$, где β_j обратимые унарные операции, а δ_j были таковы, что для всех y, z,

$$\beta^{(j)}(\sigma)\delta_j y = z\delta_j \beta_{j+1}(\sigma) = \beta^{(j+1)}(\sigma)\ \ (j = \overline{0, n-2})$$

при $\beta^{(0)} = \beta_0$ и $\beta^{(n-1)}(\sigma) = \sigma$, а для других операндов значение δ_j не равно $\beta^{(j+1)}(\sigma)$. Если в (13) используется операция δ_{n-1}, то ее ролью может быть преобразование ненулевого значения $\beta^{(n-1)}(\sigma)$ в нулевое.

Заметим, что число ненулевых коэффициентов в алгебре логики и мультипликативной алгебре равно числу ненулевых значений представляемой функции. Это позволяет по виду функции определить значение нуля алгебры и заранее оценить эффективность полиномиального представления. В отличие от алгебры логики, в мультипликативной алгебре имеется возможность управлять значениями коэффициентов, например, для минимизации объема памяти для их хранения, или для обеспечения наибольшего числа одинаковых коэффициентов.

4.2. Формы Рида-Маллера

Некоторым обобщением полиномиального представления является представление функции в форме Рида-Маллера [22, 23], у которой спектральные функции

$$\theta_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \omega_0^{i_0}(x_0)\,\delta_0\,\omega_1^{i_1}(x_1)\,\delta_1 \ldots \delta_{n-2}\,\omega_{n-1}^{i_{n-1}}(x_{n-1})\,\delta_{n-1}\,c_i, \quad (15)$$

где ω_j – унарные операции, задающие предварительное преобразование переменных перед вычислением степенных операций γ_j, $\omega_j^{i_j}(x_j) = \omega(x_j)\,\gamma_j i_j$.

Определение 14. Унарная операция ω называется обратимой, если для всех y существует единственное значение x, такое, что $\omega(x) = y$.

Синтез формы (15) выполняется по формуле (14), где вместо Γ_j используются модифицированные матрицы степенных операций Γ_j^{ω}. Пусть характеристический вектор ω_j равен $\lfloor \alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_{k_j-1} \rfloor$. Тогда α_t определяет, какая строка матрицы Γ_j является t-ой строкой матрицы Γ_j^{ω}. По теореме *8* операция ω_j не должна порождать одинаковых строк в Γ_j^{ω}, т.е. характеристический вектор ω_j – одна из $k_j!$ перестановок элементов множества N_{k_j}. Таким образом, показана справедливость следующей теоремы.

Теорема 9. Для представления произвольной дискретной функции в форме Рида-Маллера необходимо, чтобы операции ω_j ($j = \overline{0, n-1}$) были обратимыми.

Операции ω_j разбивают все k'-функции на классы эквивалентности. Это позволяет синтезировать полиномиальные формы с точностью до взаимно однозначного преобразования переменных. Если найдено компактное (эффективное) представление f, то такое же представление будут иметь $k_0! k_1! \ldots k_{n-1}!$ функций, получаемых из f после всевозможных преобразований переменных.

4.3. Мультипликативные формы

В алгебре логики и мультипликативной алгебре нахождение матрицы обратного преобразования сводится к операции транспонирования, в то время как в аддитивной алгебре и конечном поле (целостном кольце) требуется традиционное обращение матриц. Следовательно, основную трудность при синтезе полиномиальных форм вызывает обращение матриц больших размерностей.

Определение 15. Мультипликативными будем называть полиномиальные формы [25], у которых в выражении (13) все или часть операций δ_j ($j=\overline{0,n-2}$) совпадают с операцией умножения алгебры R в области значений степенных операций γ_j и γ_{j+1} (такие операции δ_j будем также называть мультипликативными).

Обобщим известное тождество, связывающее обычное и кронекеровское произведение матриц [21, п. 13.2.10].

Лемма 10. Для произвольных фундаментальных матриц A, B, C и D с размерностями $n_a \times m_a$, $n_b \times m_b$, $(n_c = m_a)\times m_c$ и $(n_d = m_b)\times m_d$ соответственно

(16) $$(A\otimes B)\times(C\otimes D)=(A\times C)\otimes(B\times D),$$

где $\otimes$ – левая (правая) операция кронекеровского произведения матриц, выполняющаяся относительно мультипликативной операции образующей алгебры R.

Доказательство. Пусть $X = A\otimes B$ и $Y = C\otimes D$. Тогда для элементов матриц X и Y по определению *13* имеем $x_{it} = a_{i_0t_0}\cdot b_{i_1t_1}$ и $y_{tj} = c_{t_0j_0}\cdot d_{t_1j_1}$, а матрица $Z = X\times Y = (A\otimes B)\times(C\otimes D)$ состоит из элементов

$$z_{ij} = \sum_{t=0}^{m_am_b-1} x_{it}\cdot y_{tj} = \sum_{t=0}^{m_am_b-1}\left(a_{i_0t_0}\cdot b_{i_1t_1}\right)\cdot\left(c_{t_0j_0}\cdot d_{t_1j_1}\right) = \sum_{t=0}^{m_am_b-1} a_{i_0t_0}\cdot b_{i_1t_1}\cdot c_{t_0j_0}\cdot d_{t_1j_1}.$$

С другой стороны, для $U = A\times C$ и $V = B\times D$ получим

$$u_{i_0j_0} = \sum_{t_0=0}^{m_a-1} a_{i_0t_0}\cdot c_{t_0j_0}, \qquad v_{i_1j_1} = \sum_{t_1=0}^{m_b-1} b_{i_1t_1}\cdot d_{t_1j_1}.$$

Если $W = U\otimes V = (A\times C)\otimes(B\times D)$, то

$$w_{ij} = \left(\sum_{t_0=0}^{m_a-1} a_{i_0t_0}\cdot c_{t_0j_0}\right)\cdot\left(\sum_{t_1=0}^{m_b-1} b_{i_1t_1}\cdot d_{t_1j_1}\right) = \sum_{t_0=0}^{m_a-1}\sum_{t_1=0}^{m_b-1}\left(a_{i_0t_0}\cdot c_{t_0j_0}\right)\cdot\left(b_{i_1t_1}\cdot d_{t_1j_1}\right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{m_am_b-1}\left(a_{i_0t_0}\cdot c_{t_0j_0}\right)\cdot\left(b_{i_1t_1}\cdot d_{t_1j_1}\right) = \sum_{t=0}^{m_am_b-1} a_{i_0t_0}\cdot b_{i_1t_1}\cdot c_{t_0j_0}\cdot d_{t_1j_1} = z_{ij},$$

где учтено, что $t = (t_1\, t_0)_{m_bm_a}$. В итоге получили $w_{ij} = z_{ij}$. Аналогично показывается справедливость тождества (16) для правой операции. ■

Теорема 11. Если δ_j ($j=\overline{0,n-2}$) – мультипликативные операции образующей алгебры R и для каждой фундаментальной матрицы Γ_j в R существует обратная матрица $\mu\Gamma_j$, то

(17) $$\mu\left(\bigotimes_{j=0}^{n-1}\Gamma_j\right) = \bigotimes_{j=0}^{n-1}\mu\Gamma_j.$$

Доказательство. Для доказательства (17) достаточно показать, что произведение левой и правой частей во всех образующих алгебрах есть единичная матрица E. По лемме *10* для произвольных обращаемых матриц Γ и Γ_j имеем

$$(\mu\,\Gamma \otimes \mu\,\Gamma_j) \times (\Gamma \otimes \Gamma_j) = (\mu\,\Gamma \times \Gamma) \otimes (\mu\,\Gamma_j \times \Gamma_j) = E_\Gamma \otimes E_{\Gamma_j} = E_{\Gamma \otimes \Gamma_j},$$

где E_Γ, E_{Γ_j}, $E_{\Gamma \otimes \Gamma_j}$ – единичные матрицы соответствующих размерностей. Индукцией по длине формулы (17) убеждаемся в ее справедливости для всех n. ■

Если имеется возможность обращать матрицы до некоторого размера m', то используем чередование мультипликативных и немультипликативных операций,

$$\theta_i(x) = \theta_i^{(0)}(x_0, \ldots, x_{t_0 - 1}) \cdot \theta_i^{(t_0)}(x_{t_0}, \ldots, x_{t_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot \theta_i^{(t_{r-1})}(x_{t_{r-1}}, \ldots, x_{n-1}) \delta_{n-1} c_i,$$

где $\theta_i^{(t)} = x_t^{i_t} \delta_t x_{t+1}^{i_{t+1}} \delta_{t+1} \ldots \delta_{t+s-1} x_{t+s}^{i_{t+s}}$, причем подряд идущих немультипликативных операций, начиная с δ_t должно быть не более s, где s находим из неравенства $m' \geq k_t k_{t+1} \ldots k_{t+s}$. При синтезе сначала получаем матрицы Γ_t ($t = \overline{0, r-1}$), соответствующие функциям $\theta_i^{(t)}$ которые, в общем случае, могут и не иметь полиномиального представления. Затем, после обращения Γ_t, находим матрицу обратного преобразования Q в виде кронекеровского произведения матриц $\mu\,\Gamma_t$. Очевидно, что при вычислениях θ_i необходимо учитывать новый порядок выполнения операций.

4.4. Частные случаи синтеза

Существует несколько частных случаев синтеза, при которых повышается эффективность вычисления функций в полиномиальном представлении.

Если последняя операция δ_{n-1} принимает значения на двоичном наборе, то операция умножения алгебры R не выполняется, а вычисление функции сводится к суммировании коэффициентов a_i, у которых θ_i не равна нулю.

В случае если операции γ_j принимают значения на двоичном наборе, т.е. преобразуют многозначные значения переменных в двоичные, то последующие вычисления спектральных функций можно производить в булевой алгебре.

При $k > k_f$ увеличивается количество операций, которые можно использовать при синтезе. При прочих равных условиях это позволяет получить более компактное представление функции.

И, наконец, количество операций, необходимых для вычисления полиномиальных функций, можно уменьшить, задав все или часть операций γ_j так, чтобы существовали такие y_j, для которых $x_j \gamma_j y_j = x_j$. Тогда при вычислении операции γ_j при $i_j = y_j$ не выполняются.

5. Неполиномиальные формы

Пусть спектральные функции имеют аналитическую конструкцию

(18) $$\theta_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \rho_0^{(i)}(x_0)\,\delta_0^{(i)}\,\rho_1^{(i)}(x_1)\,\delta_1^{(i)} \ldots \delta_{t-2}^{(i)}\,\rho_{n-1}^{(i)}(x_{n-1})\,\delta_{n-1}^{(i)}\,c^{(i)},$$

где $c^{(i)}$ – как и ранее, произвольные константы; $\delta_j^{(i)}$ ($\rho_j^{(i)}$) – система бинарных (унарных) операций ($i = \overline{0, k'-1}$, $j = \overline{0, n-1}$). В отличие от полиномиальной формы, операции в (18) зависят от индекса функции, т.е. каждая спектральная функция θ_i имеет свой собственный набор операций. Такие функции будем называть неполиномиальными. Очевидно, что полиномиальные формы являются частным случаем неполиномиальных.

Синтез неполиномиальных форм состоит в получении всевозможных спектральных функций, которые в алгебре образующих операций могут образовывать столбцы матрицы прямого преобразования D. Далее из них формируется невырожденная матрица D в соответствии с условиями теоремы разложения. Общее число таких матриц в каждой алгебре подсчитано ранее, а наибольшее число спектральных представлений имеется в конечных полях и целостных кольцах.

Рассмотрим пример синтеза аналитической конструкции неполиномиальной формы. Разложим дискретную функцию f в алгебре образующих операций по последним $s+1$ переменным,

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{k_t^{(s+1)}-1} \varphi_i^{(t)}(x_t, \ldots, x_{t+s}) \cdot a_i^{(t)}(x_0, \ldots, x_{t-1}) \ (t = n-s-1),$$

где $k_t^{(s)} = k_t k_{t+1} \ldots k_{t+s-1}$. Положим для вех $y, z \in N_{k_{t+s}}$

(19) $$\varphi_i^{(t)}(x_t, \ldots, x_{t+s-1}, y) = \varphi_i^{(t)}(x_t, \ldots, x_{t+s-1}, z) \ (i = \overline{0, k_t^{(s)}-1}),$$

т.е. первые $k_t^{(s)}$ из $k_t^{(s+1)}$ спектральных функций $\varphi_i^{(t)}$ не зависят от переменной x_{t+s}. Это возможно во всех алгебрах, кроме мультипликативной алгебры и алгебры логики. Тогда

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f^{(t)}(x_0, \ldots, x_{t+s-1}) + \sum_{i=k_t^{(s)}}^{k_t^{(s+1)}-1} \varphi_i^{(t)}(x_t, \ldots, x_{t+s}) \cdot a_i^{(t)}(x_0, \ldots, x_{t-1}),$$

где $f^{(t)}$ некоторая функция от $t+s$ переменных, $t = n-s-1$. Раскладывая, в свою очередь, $f^{(t)}$ ($t = \overline{n-s-2, 0}$) по последним $s+1$ переменным в итоге получим

$$f(x)=\sum_{i=0}^{k_0^{(s)}-1}\varphi_i(x_0,\ldots,x_{s-1})\cdot a_i+\sum_{t=0}^{n-s-1}\sum_{i=k_t^{(s)}}^{k_t^{(s+1)}-1}\varphi_i^{(t)}(x_t,\ldots,x_{t+s})\cdot a_i^{(t)}(x_0,\ldots,x_{t-1}).$$

Так как коэффициенты $a_i^{(t)}$ ($t\neq 0$, $i=\overline{k_t^{(s)},k_t^{(s+1)}-1}$) являются функциями, то представим их в виде разложения по системам ортогональных функций $\psi_{ij}^{(t)}$,

(20) $$f(x_0,\ldots,x_{n-1})=\sum_{i=0}^{k_0^{(s)}-1}\varphi_i(x_0,\ldots,x_{s-1})\cdot a_i+$$
$$+\sum_{t=0}^{n-s-1}\sum_{i=k_t^{(s)}}^{k_t^{(s+1)}-1}\varphi_i^{(t)}(x_t,\ldots,x_{t+s})\cdot\left\{\sum_{j=0}^{k_0^{(t)}-1}\psi_{ij}^{(t)}(x_0,\ldots,x_{t-1})\cdot a_{ij}^{(t)}\right\},$$

где положим $k_t^{(0)}=1$ и $\psi_{ij}^{(0)}=\tau$. Заметим, что из ортогональности φ_i, $\varphi_i^{(t)}$ и $\psi_{ij}^{(t)}$ следует их фундаментальность. Тогда используя структуру выражения (20) матрицу прямого преобразования $D=D_{n-s}$ определим из рекуррентного уравнения

(21) $$D_{t+1}=\left(E_{k_0^{(t)}}\otimes\Phi^{(t)}\right)\times\left[\begin{array}{c|c:c} D_t & \sigma & \sigma\\ \hline \sigma & \Psi_1^{(t)} & \sigma\\ \hdashline \sigma & \sigma & \Psi_{k_t-1}^{(t)}\end{array}\right]\ (t=\overline{0,n-s-1}),$$

а матрицу обратного преобразования $Q=Q_{n-s}$ из уравнения

(22) $$Q_{t+1}=\left[\begin{array}{c|c:c} Q_t & \sigma & \sigma\\ \hline \sigma & \mu\Psi_1 & \sigma\\ \hdashline \sigma & \sigma & \mu\Psi_{k_t-1}\end{array}\right]\times\left(E_{k_0^{(t)}}\otimes\mu\,\Phi^{(t)}\right)\ (t=\overline{0,n-s-1}),$$

с начальными условиями $D_0=\Phi$, $\Psi_i^{(0)}=E_{k_0^{(s)}}$ и $Q_0=\mu\Phi$, $\mu\,\Psi_i^{(0)}=E_{k_0^{(s)}}$, где

$$\Phi=[\varphi_i(j)]\ (i,j=\overline{0,k_0^{(s)}-1}),$$
$$\Phi^{(t)}=\left[\varphi_i^{(t)}(j)\right](i,j=\overline{0,k_t^{(s+1)}-1}),$$
$$\Psi_i^{(t)}=\left[\psi_{ij}^{(t)}(l)\right]\ (i=\overline{1,k_t-1},\ j,l=\overline{0,k_0^{(t)}-1}).$$

При выводе из формулы (21) формулы (22) использована теорема *11* и известное свойство обращения произведения квадратных матриц A и B: $\mu(A\times B)=\mu B\times\mu A$. Заметим, что если $\psi_{ij}^{(t)}$ – полиномиальные функции, то на кольце целых чисел при $s=0$ из (20) получаем всевозможные Нааро-подобные и усеченные формы [24].

Пример 7. Представим функцию из примера *1* в форме (20) при $s=0$. Разложение осуществим в аддитивной алгебре $\boldsymbol{R_A}$ (пример *3*) с поразрядными операциями неэквиваленция и конъюнкция, заданными на множестве N_4. Учитывая (19), положим

$$\Phi=[\tau],\ \Phi^{(0)}=\begin{bmatrix}\tau&\sigma&\sigma\\ \tau&\tau&\sigma\\ \tau&\tau&\tau\end{bmatrix},\ \Psi^{(0)}=[\tau],\ \Phi^{(1)}=\begin{bmatrix}\tau&\sigma\\ \tau&\tau\end{bmatrix},\ \Psi_1^{(1)}=\begin{bmatrix}\tau&\sigma&\tau\\ \tau&\tau&\sigma\\ \sigma&\sigma&\tau\end{bmatrix},$$

где $\sigma=0$ и $\tau=3$. Тогда в соответствии с формулами (22) и (8) получим

$$Q=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\tau&\sigma&\sigma&\sigma&\sigma&\sigma\\ -\tau&\tau&\sigma&\sigma&\sigma&\sigma\\ \sigma&-\tau&\tau&\sigma&\sigma&\sigma\\ \hline -\tau&\sigma&\tau&\tau&\sigma&-\tau\\ \tau&-\tau&-\tau&-\tau&\tau&\tau\\ \sigma&\sigma&-\tau&\sigma&\sigma&\tau\end{array}\right],\ A=Q\times F=\begin{bmatrix}3\\3\\1\\1\\3\\0\end{bmatrix},$$

что в итоге дает

$$f(x_0,x_1)=3+\varphi_1^{(0)}(x_0)\cdot 3+\varphi_2^{(0)}(x_0)\cdot 1+\varphi_1^{(1)}(x_1)\cdot\left\{\psi_{10}^{(1)}(x_0)\cdot 1+\psi_{11}^{(1)}(x_0)\cdot 3\right\}$$

и, учитывая вид спектральных функций и определения операций алгебры $\boldsymbol{R_A}$,

$$f(x_0,x_1)=3+\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}(x_0)+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}(x_1)\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}(x_0).$$

На языке программирования С f вычисляется выражением $3\char`^(-x0)\char`^x1\,?\,x0+1:0$. ■

Заметим, что регулярность аналитической конструкции у неполиномиальными форм хуже, чем у полиномиальных, а сложность представления определяется числом ненулевых коэффициентов. Поэтому при синтезе поставим задачу получения эффективных представлений, т.е. таких представлений, которые имеют наименьшее число ненулевых компонентов вектора A.

6. Критерии эффективности

По своей сути спектральное представление (1) позволяет выразить некоторую функцию f в виде линейной комбинации спектральных функций θ_i, зависящих от тех же переменных.

Эффективность спектрального представления определим относительно табличного способа вычислений, который инвариантен выбору функции f. Для этого используем абсолютные критерии эффективности из [20]. Эффективность по времени вычисления ξ определим как отношение времени табличного вычисления функции τ_t к времени ее вычисления τ по формальному описанию, $\xi=\tau_t/\tau$. Пространственную эффективность η определим как отношение информационной емкости таблицы истинности I_t к информационной емкости ее формульного представления I, $\eta=I_t/I$. Информационной емкостью формы или количеством информации, заключенным в ее коэффициентах будем называть величину

$$I=\sum_{i=0}^{m-1}\log_2\left(a_i+1\right),\ [\text{бит}].$$

Информационная емкость характеризует сложность формул и является количественной мерой для их сравнения. Под комплексной эффективностью ϑ будем понимать произведение эффективности по времени вычисления ξ на пространственную эффективность η, $\vartheta=\xi\eta=\tau_t I_t/\tau I$.

Минимизацию функций будем осуществлять при синтезе путем поиска такого базиса, в котором представление функции имеет наибольшую комплексную эффективность. Эффективными будем называть те формулы, у которых $\vartheta>1$ (при табличной реализации $\vartheta=1$).

7. Информационные оценки

Информационная емкость таблицы истинности I_t задает количество степеней свободы, которые используются для задания произвольной функции. Очевидно, что аналитическая конструкция формы должна сохранять информационную емкость таблицы истинности. Только в этом случае представление будет взаимно однозначным, а число степеней свободы при задании функции будет соответствовать числу степеней свободы формы, т.е. $I\geq I_t$.

Информационную емкость I_p полиномиальной формы (13) оценим из следующего построения. Для наглядности выберем одинаковую значность функции и переменных, равную k. Число степеней свободы, задаваемое M ненулевыми коэффициентами формы равно $M\log_2 k$, а число степеней свободы, определяемое произвольным выбором $2n$ двуместных операций – $2nk^2\log_2 k$, что дает

$$I_p=\left(M+2nk^2\right)\log_2 k\geq k^n\log_2 k,\ M\geq k^n-2nk^2.$$

Полагая время вычисления адреса входа в таблицу истинности равное времени вычисления полиномиальной функции θ_i, т.е. $\tau=M\tau_t$, получаем оценку для комплексной эффективности:

$$\vartheta\leq\frac{k^n}{\left(k^n-2nk^2\right)^2},\ k^n>2nk^2.$$

При $k^n\leq 2nk^2$ синтезируется бесповторное выражение

$$f\left(x_{n-1},\ldots,x_1,x_0\right)=c\delta_{n-1}\varphi_{n-1}\left(x_{n-1}\right)\delta_{n-2}\ldots\delta_1\varphi_1\left(x_1\right)\delta_0\varphi_0\left(x_0\right),$$

реализуемое с комплексной эффективностью $\vartheta=k^n$, куда переменные входят один раз, где φ_j $j=\overline{0,n-1}$ – некоторые одноместные операции. В табл. *5* приведены значения комплексной эффективности полиномиальных форм при различных значениях n и k, вычисленные с учетом количества бинарных операций (5).

Таблица 5

Комплексная эффективность полиномиальных форм

$n \setminus k$	2	3	4	5	7	8
3	8,000	27,000	64,000	125,000	0,180	0,034
4	16,000	1,484	0,016	0,004	–	–
5	32,000	0,010	0,001	–		–
6	0,196	0,002	–	–		–
7	0,020	–				

В свою очередь информационную емкость I_r неполиномиальной формы (18) оценим так. Число степеней свободы, задаваемое M ненулевыми коэффициентами, как и ранее, равно $M \log_2 k$, а число степеней свободы, определяемое произвольным выбором nM одноместных и nM двуместных операций равно $\left(k^2 + k\right)nM \log_2 k$ (одноместная операция задает $k \log_2 k$ степеней свободы). Это позволяет оценить число ненулевых коэффициентов

$$I_r = M\left(1 + \left(k^2 + k\right)n\right)\log_2 k \geq k^n \log_2 k \,,\; M \geq k^n \Big/ \left(1 + \left(k^2 + k\right)n\right),$$

и комплексную эффективность

$$\vartheta \leq \frac{\left\{1 + \left(k^2 + k\right)n\right\}^2}{k^n}.$$

В табл. 6 приведены значения комплексной эффективности неполиномиальных форм. Из табл. 5 и табл. 6 видно, что неполиномиальная форма в сравнении с полиномиальной позволяет получать более эффективные представления.

Таблица 6.

Комплексная эффективность неполиномиальных форм

$n \setminus k$	2	3	4	5	7	8
3	8,000	27,000	64,000	125,000	85,750	128,000
4	16,000	20,250	28,444	25,000	24,010	20,897
5	32,000	15,188	10,240	7,813	4,828	4,136
6	16,000	7,290	3,761	2,162	0,994	0,736
7	14,222	3,499	1,261	0,590	0,193	0,125
8	10,240	1,462	0,412	0,154	0,036	0,020
9	6,321	0,621	0,129	0,039	0,006	0,003
10	3,543	0,254	0,040	0,010	0,001	–
11	2,275	0,102	0,012	0,002	–	–
12	1,354	0,040	0,004	0,001	–	–
13	0,787	0,016	0,001	–	–	–

8. Асимптотические оценки

Информационные оценки получены на основе подсчета степеней свободы (числа связей для системы алгебраических уравнений), задаваемых видом аналитической конструкции формы. Эти оценки являются завышенными, т.к. при подсчете не учитывалось случаи, когда та или иная комбинация операций порождает вырожденную матрицу дискретного преобразования.

Для учета последнего обстоятельства положим $0 < d_\Omega < 1$, где d_Ω – константа, зависящая от формы и равная доле невырожденных матриц дискретного преобразования от общего их числа. После такого уточнения

(23) $$M(m) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2 + k_i\right) - C_\Omega},\ C_\Omega = -\log_{k_f} d_\Omega > 0.$$

С ростом m величина d_Ω стремится к единице (C_Ω – к нулю), как и доля обращаемых матриц (11) от общего их числа.

Из (23) нетрудно показать, что при фиксированном m число ненулевых коэффициентов минимально, когда значности переменных равны или близки к $k = \sqrt[n]{m}$ (при фиксированном n) или число переменных – к $\log_k m$ (при заданном k). Поэтому для получения асимптотической оценки $M(m)$ при $m \to \infty$ воспользуемся разложением (6) в k-значной логике. Тогда

$$M(m) \le \frac{k^{n-t}}{(n-t)\left(k_f^2 + k\right) - C_\Omega} M\left(k^t\right),$$

Заметим, что минимум оценки для $M(m)$ достигается при $n = 2t$. Последнее дает

$$(24) \qquad M(m) \sim \frac{k^n}{\left[\left(k_f^2 + k\right)\frac{n}{2}\right]^2}.$$

Теперь оценим долю функций δ с числом коэффициентов меньшим, чем $(1-\varepsilon)M$, где $0<\varepsilon<1$. Для этого подсчитаем, как изменится при этом информационная емкость таблицы истинности:

$$M(1-\varepsilon)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2 + k_i\right) - C_\Omega\right]\log k_f \geq m(1-\varepsilon)\log k_f = \sum_{i=0}^{m-1}\log\left(f(i)_{\max}+1\right).$$

Последнее равенство означает ограничение диапазона изменения некоторых или всех значений функции в таблице. В итоге имеем

$$\delta = k_f^{m(1-\varepsilon)} \Big/ k_f^m < k_f^{-\varepsilon m}.$$

Далее, из (18) получим связь количества операций для вычисления формы L с количеством ненулевых коэффициентов M: $L \sim 2nM$. В итоге справедлива

Теорема 12. Существует метод синтеза формального представления дискретных функций, при котором количество ненулевых коэффициентов формы M и число операций L удовлетворяют асимптотическим оценкам

$$M(m) \sim \frac{4}{\left(k_f^2 + k\right)^2}\frac{k^n}{n^2}, \; L(m) \sim \frac{8}{\left(k_f^2 + k\right)^2}\frac{k^n}{n};$$

причем для любого $\varepsilon > 0$ доля функций, для которых

$$M(m) \leq (1-\varepsilon)\frac{4}{\left(k_f^2 + k\right)^2}\frac{k^n}{n^2}, \; L(m) \leq (1-\varepsilon)\frac{8}{\left(k_f^2 + k\right)^2}\frac{k^n}{n}$$

стремится к нулю при $m \to \infty$ ($n \to \log_k m$ при фиксированном k или $k \to \sqrt[n]{m}$ при фиксированном n).

Асимптотическая оценка комплексной эффективности при $\tau = M\tau_t$ есть

$$\vartheta \sim \frac{1}{k^n}\left[\left(k_f^2 + k\right)\frac{n}{2}\right]^4 < 1.$$

9. Заключение

Бурное развитие дискретных систем выдвинуло в число приоритетных проблему оптимального по ряду критериев представления дискретных функций. Последующая реализация этого представления в виде дискретного устройства или программы для вычислительного средства дискретного действия преследует цель получения эффективных решений в различных прикладных областях.

В данной работе исследованы и обобщены известные алгебраические системы, используемые для спектрального представления дискретных функций. Показано, что расширение числа аналитических конструкций спектральных функций и набора операций, используемых при синтезе, позволяет учесть нетривиальные особенности функции и получить ее эффективную техническую реализацию.

Найденные информационные и асимптотические оценки показывают, что при обработке дискретных данных прибегать к формализованному представлению целесообразно только при небольших размерностях задач, когда поиск формульных (алгоритмических) представлений можно автоматизировать. Последнее, однако, не мешает искать и находить эффективные алгоритмы обработки данных, но только для ограниченного класса функций.

В связи с незначительной долей эффективно реализуемых функций при больших размерностях задачи перспективным видится метод, при котором изначально ставится не задача синтеза формального описания функции, а задача построения эффективно реализуемых форм (алгоритмов) с последующей их идентификацией, т.е. сопоставлением и искомой дискретной функцией.

Список литературы

1. *Semon W.L.* Characteristic Numbers and Their Use in the Decomposition of Switching Functions // Proc. ACM. 1952. V. 17. P. 273-280.
2. *Бибило П.Н.* Декомпозиция булевых функций (обзор) // В кн. Проектирование устройств логического управления. М.: Наука, 1985. С. 106-126.
3. *Bryant R.E.* Graph-based algorithms for Boolean function manipulation // IEEE Trans. on Comp. 1986. V. 35. P. 677-691.
4. *Кузнецов О.П.* О программной реализации логических функций и автоматов // АиТ. 1977. № 7. С. 163-174. № 9. С. 137-139.
5. *Boole G.* The Laws of Thought. London: Macmillan, 1854.
6. *Жегалкин И.И.* О технике вычисления предложений в символической логике // Математический сборник. 1927. Т. 43. С. 9-28.
7. *Мерекин Ю.В.* Арифметические формы записи булевых выражений и их применение для расчета надежности схем // Вычислительные системы. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. Вып. 7. 1963. С. 13-23.
8. *Малюгин В.Д.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // АиТ. 1982. № 4. С. 84-93.
9. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды Матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5-142.
10. *Dubrova E.V., Muzio J.C.* Generalized Reed-Muller Canonical Form for a Multiple-Valued Algebra // Multiple-Valued Logic. 1996. No. 1. P. 65-84.

Автоматика и телемеханика. 2001. № 10. С. 28-53.

11. *Выхованец В.С., Малюгин В.Д.* Кратные логические вычисления // АиТ. 1998. № 6. С. 163-171.
12. *Tosic Z.* Analytical Representation of m-Valued Logical Function over the Ring of Integers modulo m. Ph. D. thesis. Beograd: Univ. of Beograd Press, 1972.
13. *Strazdins I.J.* The Polynomial Algebra of Multivalued Logic // Algebra, Combinatorics, and Logic in Computer Science. 1983. V. 42. P. 777-785.
14. *Cohn M.* Switching Functions Canonical Form over Integer Fields. Ph. D. thesis. Mass.: Harvard University, 1960.
15. *Pradhan D.K.* A Multi-Valued Algebra Based on Finite Fields // Proc. Int. Symp. on MVL. 1974. P. 95-112.
16. *Кухарев Г.А., Шмерко В.П., Янушкевич С.П.* Техника параллельной обработки бинарных данных на СБИС. Минск: Вышэйшая школа, 1991.
17. *Hurst S.L., Miller D.M., Muzio J.C.* Spectral Techniques in Digital Logic. New York: Academic Press, 1985.
18. *Лидл Л., Нидеррайтер Г.* Конечные поля: В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1988.
19. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.
20. *Выхованец В.С.* Параллельные вычисления во времени // АиТ. 1999, № 12. С. 155-165.
21. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978.
22. *Reed L.S.* A class of multiple error correction codes and their decoding scheme // IRE Trans. on Inform. Theory. 1954, 4. P. 38-42.
23. *Muller D.E.* Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection // IRE Trans. Electron. Comput. 1954, EC-3. P. 6-12.
24. *Кухарев Г.А., Шмерко В.П.* Новые возможности дискретного преобразования Фурье для аналитического описания бинарных и многозначных данных // Распознавание классификация, прогноз. Математические методы и их применение. М.: Наука, 1991. Вып. 3. С. 112-147.
25. *Vykhovanets V.S.* The generalized multiplicate forms // Международная конф. по пробл. упр. М., 1999. Т. 3. С. 319-321.