Материалы юбилейной конференции профессорско-преподавательского состава, посвящённой 70-летию Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко. Тирасполь, 2000. С. 264-270.

Асимптотические оценки в многозначной логике

В.С. Выхованец

Произвольная дискретная функция, имеющая аргументы с различной значностью, представляется в виде формулы в функционально полном базисе операций. Приводятся информационные и асимптотические оценки сложности получаемых формул.

Введение

До настоящего времени известно небольшое количество классов дискретных функций, для которых найдены минимальные выражения. Исследования в этой области дают косвенные свидетельства того, что в общем случае поиск минимальных представлений невозможен без полного перебора вариантов и практически не реализуем [1]. Основной результат здесь формулируется в виде теоремы Шеннона-Лупанова [2], дающей асимптотическую оценку числа операций минимального представления функции в булевых базисах.

Решение актуальных проблем в области дискретных устройств в последнее время связывают с многозначной логикой. Имеется множество форм представления многозначных функций, большинство из которых является обобщением известных форм в булевой алгебре. Одной из проблем, которая здесь возникает – это сложность представления функции в виде минимального выражения. Поставим задачу исследования глобальных характеристик сложности представления дискретных функций и эффективности их реализации.

1. Дискретные функции

Пусть N_k – конечное подмножество натуральных чисел, $N_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Дискретную функцию $f \in N_{k_f}$, зависящую от n переменных $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ ($x_j \in N_{k_j}$, $j = \overline{0, n-1}$), зададим таблицей истинности с числом строк $K = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$ (табл. 1).

Взаимно однозначное соответствие между значением i переменной $x \in N_K$ и значениями i_j переменных x_j установим путем представления числа i в n-разрядной позиционной системе счисления со смешанным основанием:

$$i = \left(i_{n-1},\ \ldots,\ i_1,\ i_0\right)_{k_{n-1}\ldots k_1 k_0}, \tag{1}$$

где $i_j \in N_{k_j}$ – j-я цифра представления числа i в позиционной системе счисления по основаниям ($k_{n-1}, \ldots, k_1, k_0$).

Таблица 1. Таблица истинности дискретной функции

x_{n-1}	...	x_1	x_0	$f(x)$
0	...	0	0	$f(0)$
0	...	0	1	$f(1)$
...	...	...	...	...
i_{n-1}	...	i_1	i_0	$f(i)$
...	...	...	...	...
$k_{n-1}-1$	...	k_1-1	k_0-1	$f(K-1)$

Если значения дискретной функции не зависят от значений некоторой переменной, то такая переменная является несущественной. Под дискретной операцией будем понимать дискретную функцию, существенно зависящую от своих переменных. Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1. Количество дискретных операций значности k_f над n переменными со значностями k_j ($j = \overline{0, n\text{-}1}$) равно N_o,

$$N_o = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j=1}^{C_n^{n-i}} k_f^{k_{j_1} k_{j_2} \ldots k_{j_{n-i}}},$$

где C_n^i – число сочетаний из n по i; k_{j_1}, k_{j_2}, ..., $k_{j_{n-i}}$ пробегают все возможные сочетаний из n элементов $\{k_0,\ k_1, ..., k_{n-1}\}$ по $n-i$.

Материалы юбилейной конференции профессорско-преподавательского состава, посвящённой 70-летию Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко. Тирасполь, 2000. С. 264-270.

2. Основная теорема разложения

Известно, что на множестве N_k существует единственное конечное поле Галуа $GF(k)$, определяемое с точностью до изоморфизма, если $k = p^m$, где p – простое число, m – натуральное число.

Теорема 2. Произвольная дискретная функция $f(x_{n-1}, \ldots, x_t; x_{t-1}, \ldots, x_0)$ значности k_f при $1 \le t \le n$ представима, причем единственным образом, в виде разложения в поле $P = \langle N_{k_f}, +, \cdot \rangle$ по системе функций θ_i $(i = \overline{0, K_t - 1})$, зависящих от переменных $x_0, ..., x_{t-1}$ со значностями $k_0, ..., k_{t-1}$:

$$f(x_{n-1}, \ldots, x_t; x_{t-1}, \ldots, x_0) = \sum_{i=0}^{K_t - 1} a_i(x_{n-1}, \ldots, x_t)\, \theta_i(x_{t-1}, \ldots, x_0), \tag{2}$$

где $K_t = k_0 k_1 \ldots k_{t-1}$, a_i – коэффициенты разложения (функции, не зависящие от переменных $x_0, ..., x_{t-1}$), если определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} \theta_0(0, \ldots, 0) & \theta_1(0, \ldots, 0) & \cdots & \theta_{K_t-1}(0, \ldots, 0) \\ \theta_0(0, \ldots, 1) & \theta_1(0, \ldots, 1) & \cdots & \theta_{K_t-1}(0, \ldots, 1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_0(k_{t-1}-1, \ldots, k_0-1) & \theta_1(k_{t-1}-1, \ldots, k_0-1) & \cdots & \theta_{K_t-1}(k_{t-1}-1, \ldots, k_0-1) \end{bmatrix} \tag{3}$$

в поле P отличен от нуля.

Доказательство теоремы 2 основано на решении системы линейных уравнений, получаемых при подстановке в (2) всех возможных значений переменных. Опираясь на эту теорему может быть доказан следующий результат.

Теорема 3. Количество ортогональных базисов N_θ (систем ортогональных функций значности k_f) в произвольном поле $P = \langle N_{k_f}, +, \cdot \rangle$ равно числу обращаемых матриц размерности K,

$$N_\theta = \prod_{i=0}^{K-1} \left[k_f^K - \sum_{j=0}^{i} \left(k_f - 1\right)^j C_i^j \right], \tag{4}$$

где $K = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$ – произведение значностей переменных ортогонального базиса.

3. Дискретное ортогональное преобразование

Если (2) записать при $t = n$ для всех возможных значений переменных, то получим систему алгебраических уравнений в поле P:

$$\begin{cases} a_0\theta_0(0) + a_1\theta_1(0) + \ldots + a_{K-1}\theta_{K-1}(0) = f_0; \\ a_0\theta_0(1) + a_1\theta_1(1) + \ldots + a_{K-1}\theta_{K-1}(1) = f_1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0\theta_0(K-1) + a_1\theta_1(K-1) + \ldots + a_{K-1}\theta_{K-1}(K-1) = f_{K-1}. \end{cases} \quad (5)$$

где a_i – коэффициенты разложения, $\theta_i(j) = \theta_i(j_{n-1}, \ldots, j_0)$, $f_j = f(j_{n-1}, \ldots, j_0)$. В матричном записи (5) представляется так:

$$\begin{cases} F = D \times A; \\ A = D^{-1} \times F, \end{cases}, \; D^{-1} \times D = E \quad (6)$$

где D (D^{-1}) – квадратные матрицы прямого (обратного) преобразования, связанные условием ортогональности, E – единичная матрица размера K. Выражения (6) называются дискретным ортогональным преобразованием.

Поиск матриц D и D^{-1} при известных векторах F и/или A приводит к множеству решений, что требует наложения дополнительных ограничений (связей), определяемых требованием эффективной вычислимости функций.

4. Бесповторные формы

Наиболее изучены полиномиальные формы, аналитическая конструкция которых задается выражением:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i \left(c_i \delta_{n-1} x_{n-1}^{i_{n-1}} \delta_{n-2} \ldots \delta_1 x_1^{i_1} \delta_0 x_0^{i_0} \right), \quad (7)$$

где c_i - произвольные константы; δ_j – некоторое двуместные операции; $x_j^{i_j} = x_j \gamma_j i_j$ – переменная x_j в степени i_j, γ_j – двуместные степенные операции;

$i=\left(i_{n-1},\ldots i_0\right)_K$ - представление числа i в системе счисления (1). Обобщенная методика синтеза таких форм приведен в [3].

Рассмотрим аналитическую конструкцию вида:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{K-1} a_i\left[c_i\delta_{n-1}^i\varphi_{n-1}^i\left(x_{n-1}\right)\delta_{n-2}^i\ldots\delta_1^i\varphi_1^i\left(x_1\right)\delta_0^i\varphi_0^i\left(x_0\right)\right], \tag{8}$$

где c_i – как и ранее, произвольные константы; δ_j^i (φ_j^i) – система двуместных (одноместных) операций ($i=\overline{0,\,K-1}$, $j=\overline{0,\,n-1}$). В отличие от полиномиальной формы (7), операции в выражении (8) зависят от индекса, т.е. каждая ортогональная функция θ_i имеет свой собственный набор операций. Такие формы будем называть бесповторными.

Синтез бесповторных форм состоит в получении линейно независимых столбцов матрицы дискретного преобразования D, каждый из которых является характеристическим вектором одной из ортогональных функций. Количество таких форм определяется из выражения (4).

5. Критерии эффективности

Информационной емкостью формы или количеством информации, заключенным в ее коэффициентах будем называть величину

$$I=\sum_{i=0}^{K-1} log_2\left(a_i+1\right), \text{ [бит]}.$$

Информационная емкость характеризует сложность формул и является количественной мерой для их сравнения.

Эффективность формульного представления зададим относительно табличного способа вычислений, который инвариантен выбору функции. Эффективность по времени вычисления ξ определим как отношение времени табличного вычисления функции τ_t к времени ее вычисления τ по формальному описанию: $\xi=\tau_t/\tau$. Пространственная эффективность η есть отношение информационной емкости таблицы истинности I_t к информационной емкости ее формульного представления I: $\eta = I_t / I$. Под комплексной эффективностью ϑ будем понимать произведение эффективности по времени вычисления ξ на пространственную эффективность η: $\vartheta = \xi\eta = \tau_t I_t / \tau I$.

Эффективными будем называть те формулы, у которых $\vartheta > 1$ (при табличной реализации $\vartheta = 1$). Использование введенных критериев позволяет не только сравнивать эффективность различных представлений функции, но и эффективность представления различных функций.

6. Информационные оценки

Информационная емкость I_t задает количество степеней свободы, которые используются для задания произвольной функции. Очевидно, что аналитическая конструкция формы должна сохранять информационную емкость таблицы истинности. Только в этом случае представление будет взаимно однозначным и число степеней свободы функции будет соответствовать числу степеней свободы формы, т.е. $I \geq I_t$.

Информационная емкость формы (8) при одинаковой значности переменных k задается выражением

$$I = M\left[1 + \left(k^2 + k\right)n\right] log_2 k_f \geq I_t = k^n \, log_2 k_f ,$$

где M – число ненулевых коэффициентов, откуда при $\tau = M\tau_t$ получаем

$$M \geq k^n \Big/ \left[1 + \left(k^2 + k\right)n\right], \ \vartheta \leq \frac{\left[1 + \left(k^2 + k\right)n\right]^2}{k^n}$$

В табл. 2 приведены оценочные значения ϑ. В сравнении с полиномиальной, бесповторная форма при одних же n и k позволяет получать более эффективные представления.

Таблица 2. Комплексная эффективность бесповторных форм

n/k	2	3	4	5	6	7
3	45,125	50,704	58,141	66,248	74,671	83,268
4	39,063	29,642	25,629	23,426	22,038	21,085
5	30,031	15,312	9,962	7,296	5,725	4,698
6	21,390	7,310	3,574	2,096	1,371	0,965
7	14,445	3,304	1,213	0,570	0,311	0,188
8	9,379	1,434	0,396	0,149	0,068	0,035
9	5,908	0,604	0,125	0,038	0,014	0,006
10	3,634	0,248	0,039	0,009	0,003	0,001
11	2,192	0,100	0,012	0,002	–	–
12	1,301	0,040	0,003	–	–	–
13	0,762	0,015	0,001	–	–	–

7. Асимптотические оценки

Информационные оценки получены на основе подсчета степеней свободы (числа связей для системы линейных уравнений), задаваемых видом аналитической конструкции формы. Эти оценки являются завышенными, т.к. при подсчете не учитывалось случаи, когда та или иная комбинация операций порождает вырожденную матрицу дискретного преобразования.

Для учета последнего обстоятельства положим $0 < d_\Omega < 1$, где d_Ω – константа, зависящая от формы и равная доле линейно независимых ортогональных функций от общего их числа. После такого уточнения

$$M(K) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2 + k_i\right) - C_\Omega}, \; C_\Omega = -log_{k_f}\, d_\Omega > 0. \tag{9}$$

Следует ожидать, что с ростом размерности K величина d_Ω стремится к единице, а C_Ω – к нулю, как и доля обращаемых матриц (4) от общего их числа.

Из (9) видно, что при фиксированном K число ненулевых коэффициентов минимально, когда значности переменных равны или близки к $k = \sqrt[n]{K}$ (при фиксированном n) или число переменных – к $log_k K$ (при заданном k). Поэтому

Материалы юбилейной конференции профессорско-преподавательского состава, посвящённой 70-летию Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко. Тирасполь, 2000. С. 264-270.

для получения асимптотической оценки $M(K)$ при $K \to \infty$ воспользуемся разложением (2) в k-значной логике. Тогда

$$M(K) \le \frac{k^{n-t}}{(n-t)\left(k_f^2+k\right)-C_\Omega} M\left(k^t\right),$$

Заметим, что минимум $M(K)$ достигается при $n=2t$. Последнее дает

$$M(K) \sim \frac{K}{\left[\left(k_f^2+k\right)\frac{n}{2}\right]^2}. \qquad (10)$$

Теперь оценим долю функций δ с числом коэффициентов меньшим, чем $M(1-\varepsilon)$, где $0<\varepsilon<1$. Для этого подсчитаем как изменится информационная емкость таблицы истинности:

$$M(1-\varepsilon)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2+k_i\right)-C_\Omega\right] log\, k_f \ge K(1-\varepsilon)\, log\, k_f = \sum_{i=0}^{K-1} log\left(f(i)_{max}+1\right).$$

Последнее равенство означает ограничение диапазона изменения некоторых или всех значений функции в таблице. В итоге имеем

$$\delta = k_f^{K(1-\varepsilon)} \Big/ k_f^K < k_f^{-\varepsilon K}.$$

Теорема 4. Существует метод синтеза формального представления дискретных функций, при котором количество ненулевых коэффициентов M удовлетворяет асимптотической оценке (10); причем для любого $\varepsilon>0$ доля функций, для которых

$$M(K) \le (1-\varepsilon)K \Big/ \left[\left(k_f^2+k\right)\frac{n}{2}\right]^2$$

стремится к нулю при $K \to \infty$ ($n \to log_k K$ при фиксированном k или $k \to \sqrt[n]{K}$ при фиксированном n).

Асимптотическая оценка комплексной эффективности при $\tau = M\tau_t$ есть

$$\vartheta \sim \frac{1}{K}\left[\left(k_f^2 + k\right)\frac{n}{2}\right]^4 < 1.$$

Заключение

Информационные и асимптотические оценки в многозначной логике показывают, что при обработке дискретных данных поиск формульных (алгоритмических) представлений целесообразен только при небольших размерностях задач. Это объясняется тем, что "почти все" функции реализуются со сложностью, близкой к максимальной. Последнее, однако, не мешает искать и находить эффективные формы, но только для ограниченного класса функций.

В связи с "небольшим" числом эффективно реализуемых дискретных функций перспективным видится метод, при котором изначально ставится не задача синтеза формального описания функции, а задача построения эффективно реализуемых выражений (алгоритмов) с последующей их идентификацией, т.е. сопоставлением с искомой функцией.

Список литературы

1. Яблонский С.В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. 1959. Вып. 2. С. 75-121.
2. Лупанов О.Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз, 1963. Вып. 10. С. 63-97.
3. Выхованец В.С. Параллельные вычисления во времени // Автоматика и телемеханика. 1999, № 12. С. 155-165.