Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

УДК 519.71

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ

В.С. Выхованец
Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко
Молдавия, MD3300, Тирасполь, ул. 25 Октября, 128
E-mail: vykhovanets@ucsd.com

Ключевые слова: Идентификация дискретных объектов, конечный автомат, дискретная функция, многозначная логика, полиномиальные формы, бесповторные формы, методика синтеза форм, информационные и асимптотические оценки.
Key words: identification of discrete object, finite automata, discrete function, multivalued logic, polynomial form, repetition-free form, technique of forms synthesis, information and asymptotic estimates.

Произвольный конечный автомат декомпозируется на автоматную сеть, в состав которой входят комбинационные автоматы и линия задержки (элемент памяти). Задача идентификации сводится к представлению дискретной функции в виде формулы в некотором функционально полном базисе. Обосновывается методика синтеза полиномиальных и бесповторных форм представления дискретных функций, аргументы которой имеют различную значность. Приводятся информационные и асимптотические оценки сложности получаемых формул.
Arbitrary finite automata is decomposed to combinative automata and line of delay (unit of memory) and the identification of discrete object is reduced to identification of combinative automata. The discrete function is represented as the formula in some functionally complete base. The arguments of this function have various values. The technique of forms synthesis is described. The information and asymptotic estimations of complexity are derived.

1. Введение

Среди разнообразных работ по идентификации большое внимание уделяется динамическим объектам, описываемых линейными или разностными уравнениями с неизвестными коэффициентами. Среди разнообразных алгоритмов идентификации, предназначенных для оценивания коэффициентов модели по наблюдаемым данным, чаще всего используются рекуррентные алгоритмы, позволяющие осуществить идентификацию в режиме нормальной работы объекта [1].

Имеется круг задач, в которых объект описывается в дискретной форме. Общая постановка таких задач основана на представлении дискретного объекта в виде конечного автомата FA,

$$FA = \langle A,\ Q,\ B,\ \delta,\ \lambda \rangle,$$

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

где A – конечный входной алфавит; Q – конечное множество состояний; B – конечный выходной алфавит; δ – функция переходов, $\delta\colon Q\times A\to Q$; λ – функция выходов, $\lambda\colon Q\times A\to B$.

В рамках конечно-автоматной модели ставится задача идентификации, заключающаяся в определении множества состояний Q и функций переходов δ и выходов λ. Предполагается, что входной и выходной алфавит автомата задан. Муром доказано, что поведение автомата с k состояниями восстанавливается посредством кратного эксперимента длины $2k-1$ [2]. Другими словами, для полной и надежной идентификации конечного автомата необходимо подать на его вход все возможные входные последовательности длиной $2k-1$. При количестве знаков во входном алфавите A, равном m, таких последовательностей ровно m^{2k-1}.

Если число состояний автомата неизвестно, то его идентификация возможна лишь в пределе – на счетном множестве входных строк. Тем не менее, если найден автомат с k' состояниями, не опровергаемый последующими испытаниями длиной, большей чем $2k'-1$, то с некоторой долей уверенности можно считать, что автомат идентифицирован.

Часто задачи идентификации имеют ограниченную сложность и на практике удается избежать переборных алгоритмов. Так в работе [3] было показано, что для "почти всех" автоматов степень восстановления автомата по его поведению имеет порядок $log\ k$, что значительно меньше величины $2k-1$; в свою очередь, доля автоматов, для которых не выполняется приведенная оценка стремится к нулю с ростом k.

2. Постановка задачи

Произвольный конечный автомат FA декомпозируется на автоматную сеть (рис. 1), в состав которой входят комбинационный автомат Λ, комбинационный автомат Δ и линия задержки на один такт (элемент памяти).

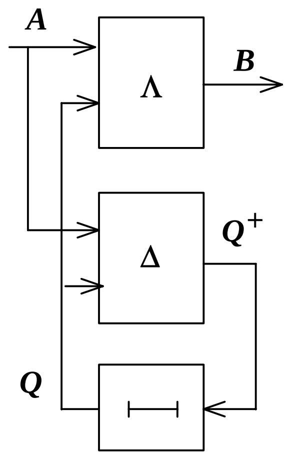

Рис. 1. Структурная декомпозиция конечного автомата

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

В результате обработки экспериментальных данных может быть получена автоматная таблица, имеющая ровно mk строк (табл. 1).

Таблица 1. Автоматная таблица ($a_j \in A$; $b_{ij} \in B$; $q_i, q'_{ij} \in Q$)

A	Q	B	Q'
a_0	q_0	b_{00}	q'_{00}
a_0	q_1	b_{01}	q'_{01}
...	...	...	...
a_0	q_{k-1}	$b_{0,k-1}$	$q'_{0,k-1}$
a_1	q_0	b_{10}	q'_{10}
a_1	q_1	b_{11}	q'_{11}
...	...	...	...
a_1	q_{k-1}	$b_{1,k-1}$	$q'_{1,k-1}$
...	...	...	...
a_{m-1}	q_0	$b_{m-1,0}$	$q'_{m-1,0}$
a_{m-1}	q_1	$b_{m-1,1}$	$q'_{m-1,1}$
...	...	...	...
a_{m-1}	q_{k-1}	$b_{m-1,k-1}$	$q'_{m-1,k-1}$

Рассмотрим произвольный комбинационный автомат (рис. 2), имеющий n входов (входные алфавиты A_0, A_1, ..., A_{n-1} с числом знаков k_0, k_1, ..., k_{n-1} соответственно) и один выход (выходной алфавит B с числом знаков k_f).

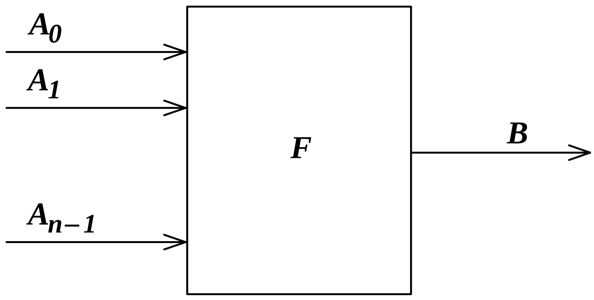

Рис. 2. Комбинационный автомат (конечный автомат без памяти)

Таким образом задача идентификации дискретных объектов сведена к идентификации комбинационных автоматов и заключается в представлении неоднородной дискретной функции в виде выражения (формулы) в некотором функционально полном базисе операций.

3. Многозначная логика

Будем различать многозначную и k-значную логику. В многозначной логике функции и переменные принимают значения на произвольных множествах значений, т.е. имеют различную значность; в то время как в k-

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

значной логике переменные и функции имею одинаковую значность, равную k. Очевидно, что k-значная логика является частным случаем многозначной.

3.1. Дискретные функции

Пронумеруем знаки алфавитов, т.е. установим взаимно однозначное соответствие между k знаками и подмножеством натуральных чисел $N_k = \{0,\ 1,\ \ldots,\ k-1\}$. В результате из табл. 1 получаем таблицу истинности неоднородной дискретной функции f, зависящей от n переменных $x = (x_{n-1},\ \ldots,\ x_1,\ x_0)$ с длиной $K = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$ (табл. 2). Заметим, что значность функции и значности переменных различны и равны количеству знаков в соответствующих алфавитах.

Таблица 2. Таблица истинности неоднородной дискретной функции

x_{n-1}	...	x_1	x_0	f
0	...	0	0	y_0
0	...	0	1	y_1
...	...	...	...	...
0	...	0	k_0-1	y_{k_0-1}
0	...	1	0	y_{k_0}
0	...	1	1	y_{k_0+1}
...	...	...	...	...
i_{n-1}	...	i_1	i_0	y_i
...	...	...	...	...
$k_{n-1}-1$	...	k_1-1	k_0-1	y_{K-1}

Взаимно однозначное соответствие между значением i переменной $x \in N_K$ и значениями i_j переменных $x_j \in N_{k_j}$ установим путем представления числа i в n-разрядной позиционной системе счисления со смешанным основанием, определяемым значностями k_j переменных x_j:

(1) $$i = (i_{n-1},\ \ldots,\ i_1,\ i_0)_{k_{n-1}\ldots k_1 k_0},$$

где $i_j \in N_{k_j}$ – j-я цифра представления числа i в позиционной системе счисления по основаниям $(k_{n-1},\ \ldots,\ k_1,\ k_0)$. Используя формулу (1) нетрудно показать справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Количество различных дискретных функций значности k_f от n переменных со значностями k_j ($j = \overline{0,\ n\text{-}1}$) равно N_f,

(2) $$N_f = k_f^K,$$

где $K = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$.

Заметим, что произвольный вектор-столбец чисел длины K (характеристический вектор) однозначно определяет $N_x(K)$ дискретных функций, где $N_x(K)$ - количество представлений числа K в виде произведения натуральных чисел.

3.2. Дискретные операции

Если значение дискретной функции не зависит от некоторой переменной, то такая переменная называется несущественной (фиктивной). Это позволяет рассматривать дискретные функции с точностью до фиктивных переменных. Для того, чтобы представление произвольной функции в виде композиции

(3) $$\theta^0\Big(\theta_1^1\big(\theta_{11}^2(\ldots),\theta_{12}^2(\ldots),\ldots,\theta_{1r}^2(\ldots)\big),\ldots,\theta_s^1\big(\theta_{s1}^2(\ldots),\theta_{s2}^2(\ldots),\ldots,\theta_{st}^2(\ldots)\big)\Big)$$

более простых функций θ_i ($i = 0, 1, \ldots$), принадлежащих некоторому функционально полному базису Θ, не было избыточным, необходимо, чтобы эти функции существенно зависели от своих аргументов. В формуле (3) использована следующая нумерация функций $\theta_{ij\ldots k}^l$: верхний индекс l обозначает глубину вложенности функции, а нижние индексы в количестве, равном глубине вложенности, определяют место функции в выражении.

Под дискретной операцией будем понимать дискретную функцию, существенно зависящую от своих переменных. Произвольная константа (переменная) является нульместной операцией. Количество таких операций равно k_f. Для того, чтобы произвольный вектор-столбец с длиной k_0 задавал унарную (одноместную) операцию значности k_f необходимо и достаточно, чтобы все элементы этого вектора не были одним и тем же числом. Количество таких операций равно $k_f^{k_0} - k_f$. Произвольная матрица размерности $k_1 \times k_0$ задает бинарную операцию значности k_f, если все строки (столбцы) этой матрицы не одинаковы. Количество таких матриц (бинарных операций) равно $k_f^{k_0 k_1} - k_f^{k_1} - k_f^{k_0} + k_f$, и т.д. Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2. Количество дискретных операций значности k_f над n переменными со значностями k_j ($j = \overline{0, n\text{-}1}$) равно N_o,

(4) $$N_o = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j=1}^{C_n^{n-i}} k_f^{k_{j_1} k_{j_2} \ldots k_{j_{n-i}}},$$

где C_n^i – число сочетаний из n по i; k_{j_1}, k_{j_2}, ..., $k_{j_{n-i}}$ пробегают все возможные сочетаний из n элементов k_0, k_1, ..., k_{n-1} по $n-i$.

Если значности всех переменных одинаковы и равны k, то формула (4) принимает более простой вид:

(5) $$N_o = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^{n-i} k_f^{k^{n-i}}.$$

3.3. Поля в многозначной логике

Полем называется алгебра, определенная на множестве N_k с двумя двуместными операциями (сложением и умножением), относительно которых известно следующее: сложение коммутативно, ассоциативно и обладает всюду определенной обратной операцией; существует нейтральный по отношению к

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

сложению элемент, называемый нулем; умножение коммутативно, ассоциативно и обладает обратной операцией, определенной для всех элементов, кроме нулевого; существует нейтральный по отношению к умножению элемент, называется единицей; сложение дистрибутивно относительно умножения.

В табл. 3 приведены определения операций для всех полей трехзначной логики.

Таблица 3. Поля в трехзначной логике

Нуль	Сложение	Умножение	Единица
0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	1
		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	2
1	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	0
		$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	2
2	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	0
		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	1

Произвольное поле, заданное на множестве N_k можно получить следующим образом. Построим две квадратные матрицы S и M с элементами $s_{ij} = (i + j)_{mod\ k}$ и $m_{ij} = (i \cdot j)_{mod\ k}$ ($i, j = \overline{0,\ k-1}$) и переименуем элементы и строки в соответствии с одной из $k!$ перестановок множества N_k. Переупорядочим элементы матриц в соответствии с новой нумерацией строк и столбцов. В итоге получим операции сложения и умножения искомого поля.

Теорема 3. Количество полей на множестве N_k не превосходит $k!$.

3.5. Основная теорема разложения

Теорема 4. Произвольная дискретная функция $f(x_0,\ \ldots,\ x_t,\ \ldots,\ x_{n-1})$ значности k_f представима единственным образом в виде разложения в поле $P = \left\langle N_{k_f},\ +,\ \cdot \right\rangle$ по системе функций θ_i ($i = \overline{0,\ k_t - 1}$), зависящих от переменной x_t значности k_t:

(6)
$$f(x_0,\ \ldots,\ x_t,\ \ldots,\ x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{k_t-1} a_i(x_0,\ \ldots,\ x_{t-1},\ x_{t+1},\ \ldots,\ x_{n-1})\ \theta_i(x_t)$$

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM).
ISBN 5-201-09605-0.

где a_i – коэффициенты разложения (функции, не зависящие от переменной x_t), если определитель матрицы

(7) $$D = \begin{bmatrix} \theta_0(0) & \theta_1(0) & \vdots & \theta_{k_t-1}(0) \\ \theta_0(1) & \theta_1(1) & \vdots & \theta_{k_t-1}(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_0(k_t-1) & \theta_1(k_t-1) & \vdots & \theta_{k_t-1}(k_t-1) \end{bmatrix}$$

в поле P отличен от нуля.

Доказательство. Запишем выражение (6) при всех возможных значениях x_t и получим систему алгебраических уравнений:

(8) $$\begin{cases} a_0\theta_0(0) + a_1\theta_1(0) + \ldots + a_{k_t-1}\theta_{k_t-1}(0) = b_0; \\ a_0\theta_0(1) + a_1\theta_1(1) + \ldots + a_{k_t-1}\theta_{k_t-1}(1) = b_1; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0\theta_0(k_t-1) + a_1\theta_1(k_t-1) + \ldots + a_{k_t-1}\theta_{k_t-1}(k_t-1) = b_{k_t-1}. \end{cases}$$

где $b_j = f(x_0, \ldots, j, \ldots, x_{n-1})$, $j = \overline{0, k_t-1}$.

Как показывается в алгебре, система (8) имеет единственное решение относительно a_j, когда определитель ρ матрицы D в поле P отличен от нуля. Искомые формулы a_j получим, пользуясь правилом Крамера:

$$a_j\rho \equiv \rho_j \;\; (j = \overline{0, k_t-1}),$$

где ρ_j – определитель матрицы D_j, полученной подстановкой в матрицу D вместо столбца j вектора свободных членов $B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{k_t-1} \end{bmatrix}^T$. Раскрываем D_j по подставляемому j-му столбцу:

$$\rho_j = \sum_{i=0}^{k_t-1} b_i\rho_{ij},$$

где ρ_{ij} – определитель матрицы, образованной из матрицы D удалением i-й строки и j-го столбца, $\rho_{ij} \in N_{k_f}$. Итак, мы находим единственное решение системы (8) в виде линейной комбинации функций (формул) b_j:

$$a_j = \sum_{i=0}^{k_t-1} b_i\left(\rho_{ij}\rho^{-1}\right) \;\; (j = \overline{0, k_t-1})$$

при условии существования для $\rho \in N_{k_f}$ обратного элемента ρ^{-1} в поле P (при неравенстве нулю определителя матрицы D). Теорема доказана.

Используя теорему 4 легко может быть доказана следующая теорема.

Теорема 5. Произвольная дискретная функция $f(x_{n-1}, \ldots, x_t, x_{t-1}, \ldots, x_0)$ значности k_f при $1 \le t \le n$ представима, причем единственным образом в виде разложения в поле $P = \langle N_{k_f}, +, \cdot \rangle$ по системе функций θ_i $(i = \overline{0, K_t-1})$, зависящих от переменных $x_0, \ldots, x_{t-1}$ со значностями $k_0, \ldots, k_{t-1}$:

(9) $$f(x_{n-1}, \ldots, x_t; x_{t-1}, \ldots, x_0) = \sum_{i=0}^{K_t-1} a_i^{(t)}(x_{n-1}, \ldots, x_t)\, \theta_i(x_{t-1}, \ldots, x_0)$$

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

где $K_t = k_0 k_1 \ldots k_{t-1}$, $a_i^{(t)}$ – коэффициенты разложения (функции, не зависящие от переменных x_0, ..., x_{t-1}), если определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} \theta_0(0,\ \ldots,\ 0) & \theta_1(0,\ \ldots,\ 0) & \vdots & \theta_{K_t-1}(0,\ \ldots,\ 0) \\ \theta_0(0,\ \ldots,\ 1) & \theta_1(0,\ \ldots,\ 1) & \vdots & \theta_{K_t-1}(0,\ \ldots,\ 1) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \theta_0(k_{t-1}-1,\ldots,k_0-1) & \theta_1(k_{t-1}-1,\ldots,k_0-1) & \vdots & \theta_{K_t-1}(k_{t-1}-1,\ldots,k_0-1) \end{bmatrix}$$

в поле P отличен от нуля.

3.6. Функционально полные базисы

Рассмотрим произвольную дискретную функцию f, имеющую значность k и определенную характеристическим вектором F длиной K. Представим f зависящей от одной переменной $x \in N_K$ и разложим ее в соответствии с теоремой **4** по некоторой системе Θ:

(10) $$f(x) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i\ \theta_i(x).$$

Отсюда получаем замечательный факт.

Теорема 6. Количество ортогональных базисов (систем ортогональных функций) в произвольном поле $P = \langle N_k,\ +,\ \cdot \rangle$, где k – простое число, равно N_θ:

(11) $$N_\theta(k,\ K) = \prod_{i=0}^{K-1} k^K - \sum_{j=0}^{i} (k-1)^j C_i^j .$$

Здесь $K = k_0 k_1 \ldots k_{n-1}$ – произведение значностей переменных ортогонального базиса (длина характеристического вектора функции), C_i^j – число сочетаний из i по j.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что матрица (7) для рассматриваемого случая имеет размерность $K \times K$, состоит из элементов множества N_k и имеет определитель, отличный от нуля. Более того, произвольная матрица с ненулевым определителем задает систему ортогональных функций в поле P. Подсчитаем количество таких матриц.

В качестве нулевой строки матрицы D можно выбрать любую из k^K строк, кроме строки, состоящей из нулей поля P. Первая строка матрицы может быть выбрана из оставшихся $k^K - k - 1$, откуда исключены строки, находящиеся в линейной зависимости с нулевой строкой. Опираясь на малую терему Ферма найдем, что таких строк ровно $k-1$, если k – простое число. Вторая строка выбирается из оставшихся $k^K - (k-1)^2 C_2^2 - (k-1)^1 C_2^1 - (k-1)^0 C_2^0$, где учтены строки, являющиеся линейной комбинацией нулевой и первой строки, а также линейно зависимых от них в произвольных сочетаниях. Заметим, что при простом k все эти строки различны. Продолжив построение до последней $K-1$ строки, которая выбирается из оставшихся

$$k^K - \sum_{j=0}^{i} (k-1)^j C_i^j$$

ISBN 5-201-09605-0.

и перемножив получившееся варианты выбора строк получаем формулу (11). Теорема доказана.

Если учесть количество полей, которые можно определить на множестве N_k (теорема 3), то получаем нижнюю оценку числа функционально полных базисов N_b для представления произвольной функции значности k с характеристическим вектором длины K:

$$N_b(k,K) \geq k!\prod_{i=0}^{K-1} k^K - \sum_{j=0}^{i}(k-1)^j C_i^j \ .$$

Из монотонности и ограниченности числа функционально полных базисов следует, что если k не является простым, но известны два простых числа k' и k'', такие, что $k' < k < k''$, то $N_b(k',\, K) \leq N_b(k,\, K) \leq N_b(k'',\, K)$.

4. Синтез форм дискретных функций

4.1. Дискретное ортогональное преобразование

Система алгебраических уравнений, получаемая при подстановке в формулу (10) всех возможных значений переменной x, позволяет решить задачу нахождения характеристического вектора функции F при известном векторе коэффициентов A, если определитель (7) не равен нулю. В матричном записи этот факт представляется так:

12) $$\begin{cases} F = D \times A; \\ A = D^{-1} \times F, \end{cases}$$

где D (D^{-1}) – квадратные матрицы прямого (обратного) дискретного преобразования, связанные условием ортогональности $D^{-1} \times D = E$, E – единичная матрица размера K. Выражение (12) носит название дискретного ортогонального преобразования.

4.2. Полиномиальные формы

Поиск матрицы D (D^{-1}) при известных векторах F и/или A имеет множество решений, что требует наложения дополнительных ограничений на вид аналитической конструкции синтезируемой формы. Эти ограничения, как правило, определяется требованием эффективности при вычислениях ортогональных функций Θ.

Традиционно, аналитическая конструкция формы задается выражением в системе одноместных и двуместных операций над множеством переменных. Наибольшее применение находит полиномиальная форма, в которой аналитическая конструкция имеет вид [4]:

(13) $$\theta_i(x_{n-1},\, \ldots,\, x_1,\, x_0) = c_i \delta_{n-1} x_{n-1}^{i_{n-1}} \delta_{n-2} \ldots \delta_1 x_1^{i_1} \delta_0 x_0^{i_0} ,$$

где c_i - произвольные константы; δ_j – некоторое двуместные операции; $x_j^{i_j} = x_j \gamma_j i_j$ – переменная x_j в степени i_j, γ_j – двуместные степенные операции; $i = (i_{n-1}, \ldots i_0)_K$ - представление числа $\boldsymbol{i}$ в позиционной системе

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

счисления со смешанным основанием (1). Выражения (10) и (13), по существу, являются результатом обобщения известных полиномиальных форм (табл. **4**).

Таблица 4. Некоторые полиномиальные формы в булевой алгебре

Форма	Аналитическая конструкция	Степенная операция
Дизъюнктивная	$f(x)=\bigvee_{i=0}^{2^n-1} f(i)\&x_{n-1}^{i_{n-1}}\&...\&x_0^{i_0}$	$x_j^i=\begin{cases}\bar{x}_j, & i=0;\\ x_j, & i=1.\end{cases}$
Конъюнктивная	$f(x)=\underset{i=0}{\overset{2^n-1}{\&}} f(i)Vx_{n-1}^{i_{n-1}}V...Vx_0^{i_0}$	$x_j^i=\begin{cases}x_j, & i=0;\\ \bar{x}_j, & i=1.\end{cases}$
Жегалкина	$f(x)=\bigoplus_{i=0}^{2^n-1} a_i\&x_{n-1}^{i_{n-1}}\&...\&x_0^{i_0}$	$x_j^i=\begin{cases}1, & i=0;\\ x_j, & i=1.\end{cases}$
Арифметическая	$f(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\left(x_{n-1}^{i_{n-1}}\&...\&x_0^{i_0}\right)$	$x_j^i=\begin{cases}1, & i=0;\\ x_j, & i=1.\end{cases}$
Уолша	$f(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i x_{n-1}^{i_{n-1}}...x_0^{i_0}$	$x_j^i=\begin{cases}1, & i=0;\\ (-1)^{x_j}, & i=1.\end{cases}$

4.3. Методика синтеза полиномиальных форм

Синтез полиномиальных форм в многозначной логике заключается в построении матриц прямого и обратного преобразования D и D^{-1} [5].

В начале задаем ядро преобразования, которое определяет степенные операции и соответствующие им матрицы W_j с элементами $w_j(\alpha,\beta)=\alpha\gamma_j\beta$, $\alpha,\beta=\overline{0,\,k_j-1}$, где $\alpha\,(\beta)$ - номер строки (столбца). Строки (столбцы) W_j должны быть линейно независимы в поле P.

Строим матрицу D по рекуррентному правилу:

$$G_0=W_0,\ \ G_{j+1}=W_j\otimes_j G_j\ \ \left(j=\overline{0,\,n-2}\right),\ \ D=C\delta_{n-1}G_{n-1},$$

где $\otimes_j$ – операция обобщенного кронекеровского произведения матриц. C – матрица констант, состоящая из K одинаковых строк K произвольных констант. Выбор операций и их последовательности не должны вести к линейной зависимости строк (столбцов) G_j, а константы c_i задаем так, чтобы определитель D был отличен от нуля.

Матрицу D^{-1} вычисляем из условия ортогональности $D^{-1}\times D=E$. Обращение матриц, как и проверку линейной независимости строк (столбцов), осуществляем в поле P.

При синтезе полиномиальной формы использована операция кронекеровского произведения матриц, выполняемая относительно некоторой двуместной операции δ_j:

$$W_j\otimes_j G_j=\left[w_j(\alpha,\,\beta)\delta_j G_j\right]_{\alpha,\beta=0}^{k_j-1},$$

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

в результате получаем матрицу, состоящую из $k_j \times k_j$ подматриц G_j, поэлементно преобразованных операцией δ_j с первым операндом $w_j(\alpha, \beta)$.

Применение мультипликативных форм уменьшает трудоемкость формирования базиса [6]. Синтез таких форм основан на свойстве обращаемости кронекеровского произведения матриц относительно мультипликативных операций δ_j (совпадающих полностью или частично с операцией умножения в поле P). В этом случае обращение кронекеровского произведения матриц получают путем кронекеровского произведения обратных матриц:

$$\left(\bigotimes_{j=0}^{n-1} G_j\right)^{-1} = \bigotimes_{j=0}^{n-1} G_j^{-1}.$$

4.4. Бесповторные формы

Рассмотрим формы, аналитическая конструкция которых имеет вид:

(14) $$\theta_i(x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) = c_i \delta_{n-1}^i \varphi_{n-1}^i(x_{n-1}) \delta_{n-2}^i \ldots \delta_1^i \varphi_1^i(x_1) \delta_0^i \varphi_0^i(x_0)$$

где c_i – как и ранее, произвольные константы; δ_j^i (φ_j^i) – система двуместных (одноместных) операций; $i = \overline{0, K-1}$, $j = \overline{0, n-2}$. В отличие от полиномиальной формы (13), операции бесповторной формы зависят от индекса функции. Попросту говоря, каждая ортогональная функция имеет свой собственный набор операций.

Синтез бесповторных форм сводится к получению линейно независимых столбцов матрицы дискретного преобразования D, каждый из которых является характеристическим вектором длиной K одной из ортогональных функций. Так как регулярность аналитической конструкции у бесповторных форм хуже чем у полиномиальных, то при синтезе ставится задача минимизации числа ненулевых компонентов в векторе коэффициентов A.

5. Информационные оценки

5.1. Критерии эффективности

Произвольная дискретная функция может быть представлена по разному и реализована с различной эффективностью, определяемой как временем вычисления, так и требуемыми аппаратурными затратами.

Информационной емкостью формы или количеством информации, заключенным в коэффициентах полинома будем называть величину

$$I = \sum_{i=0}^{K-1} log_2(a_i + 1), \text{ [бит]}.$$

Информационная емкость характеризует сложность формы и является количественной мерой для сравнения форм. Информационной энтропией или средним количеством информации, приходящимся на один коэффициент назовем величину $H = I/K$, [бит/коэф.]. Энтропия H определяет пропускную способность информационного канала, необходимого для своевременной доставки коэффициентов формы в вычислительное средство.

Эффективность формы определим относительно табличного способа вычислений, который инвариантен выбору функции. Для этого введем следующие критерии эффективности.

Эффективность по времени вычисления ξ определим как отношение времени табличного вычисления функции τ_t к времени ее вычисления τ по формальному описанию:

$$\xi = \tau_t / \tau .$$

Пространственную эффективность η определим как отношение информационной емкости таблицы истинности I_t к информационной емкости формы I:

$$\eta = I_t / I = log_2 k_f / H .$$

Под комплексной эффективностью ϑ будем понимать произведение эффективности по времени вычисления ξ на пространственную эффективность η:

$$\vartheta = \xi\eta = \tau_t \, log_2 k_f / \tau H .$$

Минимизацию форм будем осуществлять при синтезе путем поиска такого базиса Θ, в котором представление функции имеет наибольшую комплексную эффективность. Эффективными будем называть такие формы, у которых $\vartheta > 1$ (при табличной реализации $\vartheta = 1$). Использование введенных критериев позволяет не только сравнивать эффективность различных представлений функции, но и эффективность представления различных функций.

5.2. Информационные оценки для полиномиальных форм

Информационная емкость таблицы истинности I_t задает количество степеней свободы, которые используются при задании произвольной дискретной функции. Очевидно, что форма должна сохранять информационную емкость таблицы истинности. Только в этом случае представление будет взаимно однозначным и число степеней свободы при задании функции будет соответствовать числу степеней свободы формы, т.е. $I \geq I_t$.

Информационную емкость $\boldsymbol{I_p}$ полиномиальной формы (13) оценим из следующего построения. Для наглядности выберем одинаковую значность k для переменных и функции. Число степеней свободы, задаваемое M ненулевыми коэффициентами формы равно $M \, log_2 k$. Число степеней свободы, определяемое произвольным выбором $2n$ двуместных операций равно $2nk^2 \, log_2 k$, где учтено, что степени свободы двуместной операции – $k^2 \, log_2 k$. В итоге имеем:

$$I_p = \left(M + 2nk^2 \right) log_2 k \geq k^n \, log_2 k , \;\; M \geq k^n - 2nk^2 ,$$

откуда, полагая время вычисления адреса в таблице равное времени вычисления полиномиальной функции, т.е. $\tau = M\tau_t$, получаем оценку для комплексной эффективности:

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

$$\vartheta \le \frac{k^n}{\left(k^n - 2nk^2\right)^2},\ k^n > 2nk^2 .$$

При $k^n \le 2nk^2$ может быть синтезировано бесповторное выражение:

$$f\left(x_{n-1},\ \ldots,\ x_1,\ x_0\right) = c_i \delta_{n-1} \varphi_{n-1}\left(x_{n-1}\right) \delta_{n-2} \ldots \delta_1 \varphi_1\left(x_1\right) \delta_0 \varphi_0\left(x_0\right)$$

куда переменные входят только один раз. В этом случае комплексная эффективность равна k^n. В табл. **5** приведены оценочные значения комплексной эффективности полиномиальной формы при различных значениях n и k.

Таблица 5. Комплексная эффективность полиномиальных форм (на темном фоне приведена эффективность синтезируемых бесповторных выражений)

n/k	2	3	4	5	6
3	8,000	27,000	64,000	125,000	216,000
4	16,000	1,000	0,015	0,003	0,001
5	32,000	0,010	0,001	–	–
6	0,250	0,002	–	–	–

5.3. Информационные оценки для бесповторных форм

Информационную емкость I_b бесповторной формы (14) оценим так. Число степеней свободы, задаваемое M ненулевыми коэффициентами формы, как и ранее, равно $M\,log_2\,k$. Число степеней свободы, определяемое произвольным выбором nM одноместных и nM двуместных операций равно $\left(k^2 + k\right)nM\,log_2\,k$ (одноместная операция имеет $k\,log_2\,k$ степени свободы). В итоге получим оценку количества ненулевых коэффициентов

$$I_b = M\left(1 + \left(k^2 + k\right)n\right) log_2\,k \ge k^n\,log_2\,k,\ M \ge k^n \Big/ \left(1 + \left(k^2 + k\right)n\right)$$

и комплексной эффективности бесповторной формы

$$\vartheta \le \frac{\left(1 + \left(k^2 + k\right)n\right)^2}{k^n}.$$

Приравняв ϑ единице получаем условие абсолютной эффективности :

$$\frac{k^{n/2}}{n} \le k^2 + k .$$

В табл. **6** приведены оценочные значения комплексной эффективности, откуда видно, что бесповторная форма в сравнении с полиномиальной при одних же n и k позволяет получать более эффективные представления.

Материалы международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» [электронный ресурс] М., 2000. Электрон. опт. диск (CD-ROM). ISBN 5-201-09605-0.

Таблица 6. Комплексная эффективность бесповторных форм

n/k	2	3	4	5	6	7
3	45,125	50,704	58,141	66,248	74,671	83,268
4	39,063	29,642	25,629	23,426	22,038	21,085
5	30,031	15,312	9,962	7,296	5,725	4,698
6	21,390	7,310	3,574	2,096	1,371	0,965
7	14,445	3,304	1,213	0,570	0,311	0,188

6. Асимптотические оценки

Рассмотренные выше информационные оценки получены на основе подсчета степеней свободы (числа связей для системы линейных алгебраических уравнений), задаваемых видом аналитической конструкции. Эти оценки являются завышенными, т.к. при вычислениях не учитывалось случаи, когда та или иная комбинация операций порождает вырожденную матрицу дискретного преобразования.

Очевидно, что при устремлении в бесконечность длины характеристического вектора K (увеличение числа переменных при их ограниченной значности) неравенство $I \ge I_t$ превращается в асимптотическое равенство $I_t \sim I$, т.е. число степеней свободы функции должно быть асимптотически равно числу степеней свободы формы.

Подсчитаем информационную емкость бесповторной формы при различной значности переменных и функции:

$$M \log_2 k_f \sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2 + k_i\right) \sim \log_2 k_f \prod_{i=0}^{n-1} k_i \,,$$

Откуда получаем асимптотическую оценку для числа ненулевых коэффициентов:

$$M \sim \prod_{i=0}^{n-1} k_i \Bigg/ \sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2 + k_i\right)$$

Теорема 7. Существует метод синтеза бесповторной формы дискретной функции значности k_f, при котором количество ненулевых коэффициентов формы M и количество операций L ее вычисления удовлетворяют следующим оценкам:

$$M(K,n) \sim \frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2 + k_i\right)}, \; L(K,n) \sim 2nM(K,n),$$

где $K = k_0 k_1 \dots k_{n-1}$, k_j $(j = \overline{0,\, n-1})$ – значности переменных; причем, для любого $\varepsilon > 0$ доля функций, для которых

$$M(K,n) \le (1-\varepsilon)\frac{\prod_{i=0}^{n-1} k_i}{\sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2 + k_i\right)},\ L(K,n) \le (1-\varepsilon)2nM(K,n),$$

стремится к нулю при $K \to \infty$ ($n \to \infty$ при ограниченных значностях переменных) .

Асимптотическая оценка комплексной эффективности (при $\tau = M\tau_t$) имеет вид:

$$\vartheta \sim \left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(k_f^2 + k_i\right)\right]^2 \Big/ \prod_{i=0}^{n-1} k_i < 1.$$

7. Заключение

Информационные и асимптотические оценки показывают, что при идентификации дискретных объектов прибегать к их формализованному представлению целесообразно только при небольшом числе состояний. Если объект достаточно сложный, то приемлемой является табличная форма его описания. Это объясняется тем, что "почти все" функции реализуются со сложностью, близкой к максимальной. Последнее, однако, не мешает искать и находить эффективные формы, но только для ограниченного класса функций.

Минимизацию дискретных функций при больших значениях K принято рассматривать как комбинаторную задачу, точный алгоритм которой достаточно трудоемок, ибо связан с перебором большого числа решений [7]. Исследования в этой области дают косвенные подтверждения того, что поиск эффективных представлений невозможен без перебора возможных вариантов и практически нереализуем. Оценить по табличному представлению функции число операций в минимальном представлении, не проводя синтеза, также не удается.

Список литературы

1. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.
2. Мур Э.Ф. Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 179-210.
3. Трахтенброт Б.А., Бардзинь Я.М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970. 400 с.
4. Выхованец В.С. Параллельные вычисления во времени // АиТ. 1999, № 12. С. 155-165.
5. Выхованец В.С. Обработка сигналов в дискретных базисах на основе обобщенных полиномиальных форм // Цифровая обработка сигналов и ее применение. М., 1999. Т. 2. С. 372-377.
6. Vykhovanets V.S. The generalized multiplicate forms // Международная конф. по пробл. упр. М., 1999. Т. 3. С. 319-321.
7. Яблонский С.В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. 1959. Вып. 2.