Доклады 2-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение».
М., 1999. Т. 2. С. 372-377.

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ДИСКРЕТНЫХ БАЗИСАХ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФОРМ

Выхованец В.С.

Приднестровский государственный университет
Тирасполь, ул. 25 Октября, 128, тел. (04233) 3-64-22, факс 3-25-04, e-mail tdsu@tirastel.md

Реферат. Рассмотрена обработка сигналов в дискретных базисах, основанная на представлении дискретной функции в обобщенной полиномиальной форме. Приведена методика синтеза полиномиальных ортогональных функций в расширенном базисе операций и смешанной значности переменных. Оценена эффективность реализации полинома и определены условия бесповторного представления произвольной функции, при котором переменные в выражение входят один раз.

1. Введение

Дискретные преобразования являются мощным средством исследования сигналов различной физической природы, эффективно используемым в различных областях науки и техники (управление, связь, обработка данных, и т.д.) [1]. Дискретное преобразование задается соотношениями вида:

$$f(t)=\sum_{i=0}^{K-1}a(i)\theta(i,t), \qquad a(i)=\sum_{t=0}^{K-1}f(t)\theta^{-1}(t,i) \tag{1}$$

где $f(t)$ - отсчеты сигнала в дискретные моменты времени $t=\overline{0,K-1}$; $a(i)$, $i=\overline{0,K-1}$ - спектр сигнала, или коэффициенты разложения по системе функций (в базисе) $\left\{\theta(i,t),\theta^{-1}(t,i)\right\}_{i,t=0}^{K-1}$; K - число отсчетов во временной (частотной) области. Для взаимно однозначного преобразования сигнала в спектр и обратно на базис накладывают ограничение:

$$\sum_{i=0}^{K-1}\theta^{-1}(t,i)\,\theta(i,\tau)=\begin{cases}1, & t=\tau;\\ 0, & t\neq\tau.\end{cases} \tag{2}$$

Выражения (1) и (2) также могут быть представлены в матричном виде:

$$\begin{cases}F=D\times A;\\ A=D^{-1}\times F,\end{cases} \qquad D^{-1}\times D=E, \tag{3}$$

где F (A) - выборка (спектр) сигнала, вектор-столбец длины K; D (D^{-1}) - матрица прямого (обратного) преобразования размерности $K\times K$; E - единичная матрица той же размерности.

Помимо условия ортогональности (2) на базис преобразования (1) дополнительно налагают ряд ограничений. Среди них - возможность факторизации, обеспечение приемлемой сложности вычисления ортогональных функций, получение большого количества нулевых коэффициентов для сигналов заданного класса, возможность распознавания свойств сигнала по его спектру, и т.д. На практике используется небольшое число базисов [1, 2] (Фурье, Хартли, Уолша, Хаара, и т.д.), что связано, в основном, со сложностью реализации ортогональных функций.

Применение в цифровой обработке сигналов микропроцессорных средств позволяет расширить класс эффективно реализуемых функций. После дискретизации и квантования, которые необходимы при использовании дискретных устройств, сигнал представляется своими выборочными значениями, задаваемыми с некоторой точностью по времени и по уровню. Это позволяет кодировать вычисляемые значения целыми числами, а саму функцию f рассматривать как дискретную.

Просматривается определенная методологическая связь между цифровой обработкой сигналов и операционной обработкой данных [3], в основе которой лежит теория дискретных функций (табл. 1). Дискретные функции применяются для решения таких задач как синтез, анализ и моделирование дискретных устройств, а также при логических вычислениях. Отличие цифровой обработки сигналов от операционной обработки данных заключается в различных постановках задач. В последнем случае основной задачей является минимизация формы представления дискретной функции с целью ее эффективного вычисления (реализации) [4], в то время как при цифровой обработке сигналов основная задача - получение спектра сигнала для последующей его обработки в спектральной области [5].

Таблица 1. Соответствие терминов и процедур

Цифровая обработка сигналов	**Операционная обработка данных**
Дискретный сигнал	Дискретная функция
Многомерный сигнал	Система функций
Вектор отсчетов сигнала	Характеристический вектор функции
Спектр сигнала	Вектор коэффициентов формы
Выбор базиса	Синтез аналитической конструкции формы
Оптимизация базиса	Минимизация формы
Сжатие сигнала	Минимизация функции
Генерация сигналов с заданными спектральными свойствами	Синтез форм с заданными свойствами
Представление сигнала в спектральной области	Вычисление вектора коэффициентов формы
Восстановление сигнала по его спектру	Кратные вычисления формы [6]
Взаимное преобразование спектров	Взаимное преобразование форм
Обработка сигнала в спектральной области: свертка, корреляция фильтрация	Операции над формами композиция форм преобразование форм

2. Постановка задачи

Откажемся от использования комплексной арифметики и чисел в формате с плавающей запятой при реализации дискретного преобразования (1) и осуществим цифровую обработку сигналов путем целочисленных вычислений. Для учета операционных возможностей вычислительного средства поставим задачу синтеза формального описания дискретной функции в расширенном базисе операций многозначной логики и с различной (смешанной) значностью аргументов. В пользу такого подхода говорит, во-первых, сложившаяся практика программирования, когда микропроцессор рассматривается как устройство, выполняющее операции над натуральными числами ограниченного диапазона. Во-вторых, нет никаких препятствий в реализации многозначных логических элементов, используя традиционную элементную базу. В последнем случае к двоичному кодированию переходим на этапе технической реализации.

Дискретные вычисления сведем к реализации в базисе многозначных операций некоторой дискретной функции f значности k_f от n переменных $X = \{x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0\}$. Переменные X могут иметь различные значности $x_j \in \{0, \ldots, k_j - 1\}$ ($j = \overline{0,\ n-1}$), определяемые, например, разделением значений аргумента t на части, возможно не равные, так, чтобы $K = k_{n-1} \ldots k_1 k_0$. В результате синтеза формального описания функции f среди возможных ее форм найдем такие, которые эффективны при реализации.

3. Полиномиальные формы

Произвольную дискретную функцию f представим в обобщенной полиномиальной форме [7]:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i \left(c_i \delta_n x_{n-1}^{i_{n-1}} \delta_{n-1} \ldots \delta_0 x_0^{i_0} \right) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i \ \theta(i, X), \tag{4}$$

где a_i - коэффициенты формы; c_i - произвольные константы; δ_j - логические операции, входящие в набор операций $\Delta = \{\delta_n, \delta_{n-1}, \ldots, \delta_1, \delta_0\}$; $x_j^{i_j} = x_j \gamma_j i_j$ - переменная x_j в логической степени i_j, все степенные операции γ_j принадлежат набору $\Gamma = \{\gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1, \gamma_0\}$; $i = (i_{n-1}, \ldots i_0)_K$ - представление числа i в позиционной системе счисления со смешанным основанием, $i_j \in \{0, \ldots, k_j - 1\}$; $\theta(i, X)$ - полиномиальные ортогональные функции.

Порядок выполнения операций в выражении справа налево при приоритете степенных операций. Самым низким приоритетом обладает операция сложения, более высокий приоритет у операции умножения. Операции сложения и умножения образуют алгебру $B = \langle P, +, \cdot \rangle$, заданную на множестве $P = \{0, 1, \ldots, k_f - 1\}$. Выражение (4), по существу, является результатом обобщения известных полиномиальных форм (табл. 2).

Таблица 2. Полиномиальные формы в булевой алгебре

Форма	Аналитическая конструкция	Степенная операция
Дизъюнктивная	$f(X) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} f(i) \& x_{n-1}^{i_{n-1}} \& \ldots \& x_0^{i_0}$	$x_j^i = \begin{cases} \bar{x}_j, & i = 0; \\ x_j, & i = 1. \end{cases}$
Конъюнктивная	$f(X) = \mathop{\&}_{i=0}^{2^n-1} f(i) V x_{n-1}^{i_{n-1}} V \ldots V x_0^{i_0}$	$x_j^i = \begin{cases} x_j, & i = 0; \\ \bar{x}_j, & i = 1. \end{cases}$
Жегалкина	$f(X) = \bigoplus_{i=0}^{2^n-1} a_i \& x_{n-1}^{i_{n-1}} \& \ldots \& x_0^{i_0}$	$x_j^i = \begin{cases} 1, & i = 0; \\ x_j, & i = 1. \end{cases}$
Арифметическая	$f(X) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \left(x_{n-1}^{i_{n-1}} \& \ldots \& x_0^{i_0} \right)$	$x_j^i = \begin{cases} 1, & i = 0; \\ x_j, & i = 1. \end{cases}$
Уолша	$f(X) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i x_{n-1}^{i_{n-1}} \ldots x_0^{i_0}$	$x_j^i = \begin{cases} 1, & i = 0; \\ (-1)^{x_j}, & i = 1. \end{cases}$

Из выражения (4) видно, что произвольная полиномиальная функция $\theta(i, X)$ вычисляется за $2n$ команд микропроцессора. Композицию функций $g(f(X))$, каждая их которых представлена в полиномиальном виде, реализуем путем разделения результата вычисления функции f на n' частей (переменных) и вычисления g по ее полиномиальному представлению.

4. Синтез полиномиальных форм

При синтезе формального описания функции поставим не только задачу вычисления матриц дискретного ортогонального преобразования для традиционных базисов, но и задачу представления произвольной дискретной функции в виде разложения (1) по полиномиальным функциям $\theta(i, X)$.

Запишем выражение (4) для всех возможных значений $X \in \{0, 1, \ldots, K-1\}$:

$$\begin{cases} a_0 \theta_{00} + a_1 \theta_{01} + \ldots + a_{K-1} \theta_{0,K-1} = f_0 \\ a_0 \theta_{10} + a_1 \theta_{11} + \ldots + a_{K-1} \theta_{1,K-1} = f_1 \\ \cdots \\ a_0 \theta_{K-1,0} + a_1 \theta_{K-1,1} + \ldots + a_{K-1} \theta_{K-1,K-1} = f_{K-1} \end{cases} \tag{5}$$

Доклады 2-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение».
М., 1999. Т. 2. С. 372-377.

где $\theta_{ij} = \theta(i, j)$, $f_j = f(j)$. Для нахождения коэффициентов формы необходимо решить систему линейных уравнений (5) в алгебре B относительно a_i, для чего определим операции сложения и умножения следующим образом:

i) сложение: $\forall a,\ b \in P$, $\exists s \in P$, $s = a + b$, называемый суммой a и b, причем сложение:

i.1) коммутативно, $a + b = b + a$;

i.2) ассоциативно, $a + (b + c) = (a + b) + c$;

i.3) $\forall a \in P$, $\exists 0 \in P$, что $a + 0 = a$;

i.4) $\forall a \in P$, $\exists (-a) \in P$, что $a + (-a) = 0$;

ii) умножение: $\forall a,\ b \in P$, $\exists p \in P$, $p = ab$, называемый произведением a и b, причем:

ii.1) $\forall a \in P$, $\exists 1 \in P$, что $a1 = a$;

ii.2) $\forall a \in P$, $\exists a^{-1} \in P$, что $aa^{-1} = 1$;

iii) умножение дистрибутивно слева относительно сложения: $a(b + c) = ab + ac$.

Использование ограничений i)-iii) на выбор операций B позволяет для решения системы (5) использовать методы линейной алгебры, при применении которых необходимо учесть, что в алгебре существует только правая единица и умножение не ассоциативно и не коммутативно. Достаточность условий i)-iii) следует, например, из решения системы (5) методом Гаусса. Заметим, что свойства i)-iii) не являются необходимыми. При решении системы логических уравнений в булевой алгебре [8] свойства i.3) и i.4) не выполняются, а умножение коммутативно и ассоциативно. Другой пример – представление дискретной функции в поле Галуа [9].

Для синтеза формы (4) используем дискретное ортогональное преобразование (3), где F - характеристический вектор функции, A - вектор коэффициентов формы, D и D^{-1} - матрицы прямого и обратного преобразования. Последние получаем следующим образом.

1). Задаем ядро преобразования, которое определяет степенные операции и соответствующие им матрицы W_j с элементами $w_j(\alpha,\beta) = \alpha\gamma_j\beta$, $\alpha,\beta = \overline{0, k_j - 1}$, где α (β) - номер строки (столбца). Строки (столбцы) W_j должны быть линейно независимы в алгебре B.

2). Строим матрицу D по рекуррентному правилу:

$$G_0 = W_0,\ G_{j+1} = W_j \otimes_j G_j\ \left(j = \overline{0, n-2}\right),\ D = C\delta_n G_{n-1},$$

где $\otimes_j$ - операция обобщенного кронекеровского произведения матриц. C - матрица констант, состоящая из K одинаковых строк K произвольных констант. Выбор операций и их последовательности не должны вести к линейной зависимости срок (столбцов) G_j, а константы c_i задаем так, чтобы определитель D был отличен от нуля.

3). Матрицу D^{-1} вычисляем из условия ортогональности: $D^{-1} \times D = E$. Обращение матриц, как и проверку линейной независимости строк (столбцов), осуществляем в алгебре B.

При синтезе полиномиальной формы использована операция кронекеровского произведения матриц, выполняемая относительно операций из Δ:

$$W_j \otimes_j G_j = \left[w_j(\alpha,\beta)\delta_j G_j\right]_{\alpha,\beta=0}^{k_j-1},$$

в результате получаем матрицу, состоящую из $k_j \times k_j$ подматриц G_j, поэлементно преобразованных операцией δ_j с первым операндом, равным $w_j(\alpha,\beta)$. Проверка функциональной полноты базиса

Доклады 2-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение».
М., 1999. Т. 2. С. 372-377.

$\Omega = \{+,\cdot\} \cup \Delta \cup \Gamma$, таким образом, сведена к установлению линейной независимости строк (столбцов) матрицы G_{n-1} в алгебре B.

Применение мультипликативных форм [10, 11] уменьшает трудоемкость формирования базиса дискретного преобразования. Синтез мультипликативных форм основан на свойстве обращаемости кронекеровского произведения матриц относительно мультипликативных операции δ_j (совпадающих с операцией умножения алгебры B). В этом случае обращение кронекеровского произведения матриц получают путем кронекеровского произведения обратных матриц:

$$\left(\bigotimes_{j=0}^{n-1} G_j \right)^{-1} = \bigotimes_{j=0}^{n-1} G_j^{-1}.$$

Повышение эффективности вычислений в многозначной логике на вычислительных средствах с двоичным кодирование данных достигнуто путем использования булевой, Уолша и обобщенной мультипликативных форм. Для булевой формы степенные операции задаются в виде булевых матриц; для формы Уолша - в виде матриц, состоящих из -1 и 1; для обобщенной формы - из -1, 0 и 1. Минимизация мультипликативных форм осуществляется путем подбора степенных операций. Самой эффективной оказалась обобщенная мультипликативная форма, для которой мощность множества степенных операций значительно превосходит аналогичную мощность булевой формы и формы Уолша.

Может быть поставлена задача кратных вычислений дискретной функции [6, 7], когда функция вычисляется сразу на m наборах переменных $X^{(r)}$ ($r = \overline{0, m-1}$). Синтез форм кратных вычислений основан на параллельной декомпозиции функции, заданной в полиномиальной форме на всех наборах переменных.

5. Критерии эффективности

Произвольная дискретная функция может быть представлена по разному, и как следствие этого, реализована с различной эффективностью, определяемой как временем вычисления, так и требуемыми аппаратурными затратами.

Информационной емкостью полиномиальной формы (4) или количеством информации, заключенным в коэффициентах полинома будем называть величину

$$I = \sum_{i=0}^{K-1} log_2 (a_i + 1), \text{ [бит].}$$

Информационная емкость характеризует сложность полинома и является количественной мерой для сравнения полиномов. Информационной энтропией или средним количеством информации, приходящимся на один коэффициент назовем величину $H = I/K$, [бит/коэф.]. Энтропия H определяет пропускную способность информационного канала, необходимого для своевременной доставки коэффициентов полинома в вычислительное средство.

Эффективность представления (реализации) функции определим относительно табличного способа вычислений, который инвариантен функции. Для этого введем следующие критерии эффективности. Эффективность по времени вычисления ξ определим как отношение времени табличного вычисления функции τ_t к времени ее вычисления по формальному описанию τ: $\xi = \tau_t / \tau$. Пространственную эффективность η определим как отношение информационной емкости таблицы истинности I_t к информационной емкости полинома I: $\eta = I_t / I = log_2 k_f / H$. Под комплексной эффективностью ϑ будем понимать произведение эффективности по времени вычисления ξ на пространственную эффективность η:

$$\vartheta = \xi\eta = \tau_t \, log_2 k_f / \tau H.$$

Доклады 2-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение».
М., 1999. Т. 2. С. 372-377.

Минимизацию полиномиальных форм будем осуществлять при синтезе путем поиска такого базиса Ω, в котором представление функции имеет наибольшую комплексную эффективность. Эффективными будем называть такие формы, комплексная эффективность которых больше единицы: $\vartheta > 1$ (при табличной реализации комплексная эффективность равна единице). Использование комплексной эффективности позволяет не только сравнивать эффективность различных представлений функции, но и эффективность представления различных функций.

6. Информационные оценки

Информационная емкость таблицы истинности I_t задает количество степеней свободы, которые используются при задании произвольной дискретной функции. Очевидно, что форма (4) должна сохранять информационную емкость таблицы истинности. Только в этом случае представление будет взаимно однозначным и число степеней свободы при задании функции будет соответствовать числу степеней свободы формы, т.е. $I_p \ge I_t$.

Информационную емкость формы I_p определим из следующего построения. Для наглядности выберем одинаковую значность k для переменных и функции. Число степеней свободы, задаваемое M ненулевыми коэффициентами формы равно $M \log_2 k$. Число степеней свободы, определяемое произвольным выбором n одноместных степенных и n двуместных операций равно $\left((n-1)k^2 + (n+1)k\right)\log_2 k$, где учтено, что степени свободы, обеспечиваемые произвольной двуместной операцией определяются выражением: $k^2 \log_2 k$, одноместной - $k \log_2 k$, а операция δ_n эквивалентна одноместной операции. В итоге имеем:

$$I_p = \left(M + (n-1)k^2 + (n+1)k\right)\log_2 k \ge k^n \log_2 k,$$

откуда получаем оценку для комплексной эффективности формы:

$$\vartheta \le \frac{\tau_t k^n}{2(n+1)\left(k^n - (n-1)k^2 - (n+1)k\right)^2}, \qquad k^n > (n-1)k^2 + (n+1)k \tag{6}$$

Оценка (6) является заниженной, так как при ее выводе не учтены все степенные операции. При $k^n \le (n-1)k^2 + (n+1)k$ в базисе $\Delta \cup \Gamma$ может быть синтезировано бесповторное выражение:

$$f(X) = c\delta_n x_{n-1}^{i_{n-1}} \delta_{n-1} \ldots \delta_1 x_1^{i_1} \delta_0 x_0^{i_0}, \tag{7}$$

куда переменные входят только один раз. Комплексная эффективность бесповторной формы (7) равна $\tau_t k^n / 2n$. В табл. 3 приведены оценочные значения комплексной эффективности полинома.

Таблица 3. Комплексная эффективность полиномиальных форм

n/k	2	3	4	5	6
3	1,3333 τ_t	4,5000 τ_t	0,0313 τ_t	0,0052 τ_t	0,0019 τ_t
4	2,0000 τ_t	0,0053 τ_t	0,0015 τ_t	0,0002 τ_t	—
5	0,1667 τ_t	0,0006 τ_t	0,0007 τ_t	—	—
6	0,0051 τ_t	0,0001 τ_t	—	—	—

Полиномиальная форма эффективна при малом числе переменных. При большом n (k) почти все коэффициенты отличны от нуля и почти все функции реализуются со сложностью, близкой к максимальной. Заметим, что последнее не мешает получать эффективные формы, но для ограниченного класса функций.

Доклады 2-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение».
М., 1999. Т. 2. С. 372-377.

7. Заключение

Алгебраическая система $\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Omega} \rangle$ является по существу математической моделью современных вычислительных средств, а обобщенная полиномиальная форма - адекватная этой модели форма представления дискретных функций. Синтез полиномиальных форм в расширенном базисе операций и смешанной значностью переменных позволяет получить нетрадиционные методы цифровой обработки сигналов и интенсифицировать использование микропроцессоров.

Библиография

1. Залмазон Л.А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. - М., 1989.
2. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. - Новосибирск, 1983.
3. Кухарев Г.А., Шмерко В.П., Янушкевич С.Н. Техника параллельной обработки бинарных данных на СБИС. - Мн., 1991.
4. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. - М., 1962.
5. Пойда В.Н. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. - Мн., 1983.
6. Выхованец В.С., Малюгин В.Д. Кратные логические вычисления // Автоматика и телемеханика. 1998. № 6. С. 163-171.
7. Выхованец В.С., Малюгин В.Д. Спектральные методы в логическом управлении // Материалы 2-й науч.-техн. конф. "Современные методы цифровой обработки сигналов в системах измерения, контроля, диагностики и управления" (ОС-98). Мн., 1998. С. 56-60.
8. Закревский А.Д. Логические уравнения. - Мн., 1975.
9. Menger K.S. A transform for logic networks // IEEE Trans. and computers. 1969. V. C-18. № 3. P. 241-250.
10. Vichovanets V.S. The generalized multiplicate forms // Международная конф. по пробл. упр.: Тез. докл. Т. 3. М., 1999. С. 319-321.
11. Выхованец В.С. Булевы мультипликативные формы // Международная науч.-практ. конф. "Математические методы в образовании, науке и промышленности": Тез. докл. Тирасполь, 1999. С. 52-54.