Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Математические методы в образовании, науке и промышленности». Тирасполь, 1999. С. 52-53.

Булевы мультипликативные формы

В.С. Выхованец
(Приднестровский государственный университет)

Решение таких задач как логическое управление, дискретная оптимизация, обработка сигналов и изображений, распознавание образов, прогнозирование, принятие решений, моделирование дискретных устройств и т.д., сводится к логической обработке данных. Логическая обработка формализуется в алгебре логики и представляется в виде логической функции $f(X)$, имеющую значность k_f и заданной на множестве из n аргументов $X = \{X_{n-1},\ldots,X_1,X_0\}$, имеющих различную значность k_i, $i=\overline{0,\ n-1}$:

Известные методы логических вычислений своей структурой повторяют формульное описание функции [1]. Наименее изученными остаются вопросы, связанные с расширением форм представления логических данных с учетом операционных возможностей используемого вычислительного средства Основываясь на ранее полученных результатах [2], приведем обобщенную методику синтеза полиномиальных форм. Произвольную функцию представим в обобщенной полиномиальной форме:

$$f(X) = \sum_{i=0}^{k-1} A_i \times \left(C_i \delta_n X_{n-1}^{i_{n-1}} \delta_{n-1} \ldots \delta_0 X_0^{i_0} \right) = \sum_{i=0}^{k-1} A_i \times \theta_i(X), \tag{1}$$

где $k = k_{n-1} \ldots k_1 k_0$; A_i - коэффициенты формы; C_i - произвольные константы; δ_t - логические операции; $X_i^{i_t}$ - переменная X_i в логической степени i_t; $i = (i_{n-1},\ldots i_0)_k$ - представление числа i по смешанным основаниям k; $\theta_i(X)$ - полиномиальные ортогональные функции. Операции $\{+,\ \times\}$ в (1) образуют поле на некотором множестве натуральных чисел, например, арифметические операции, выполняемые по модулю k_f. Для синтеза (1) используем дискретное ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} A = D \times F; \\ F = D^{-1} \times A, \end{cases} \tag{2}$$

где F - характеристический вектор функции, A - вектор коэффициентов формы, D и D^{-1} - матрицы прямого и обратного преобразования размерности $k \times k$. Последние получаем следующим образом. Задаем ядро преобразования (2), которое определяет степенные операции и соответствующие матрицы W_t с элементами $w(i,j) = i^j$, $i,j = \overline{0, k_t - 1}$, где $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{j}$) - номер строки (столбца). Строки (столбцы) матрицы $\boldsymbol{W_t}$ должны быть линейно независимы. Строим матрицу $\boldsymbol{D^{-1}}$ по рекуррентному правилу:

$$\boldsymbol{G_0 = W_0;\ \ G_{t+1} = W_t \otimes_t G_t,\ \ \left(t = \overline{0, n-2}\right);\ \ D^{-1} = C_n \delta_n G_{n-1},}$$

где $\otimes_{\boldsymbol{t}}$ - операция обобщенного кронекеровского произведения матриц [3]; $\boldsymbol{C_n}$ - матрица констант, состоящая из k одинаковых строк k произвольных констант. Выбор операций и их последовательности не должны вести к линейной зависимости срок (столбцов) $\boldsymbol{G_t}$, а константы $\boldsymbol{C_i}$ задаем так, чтобы определитель $\boldsymbol{D^{-1}}$ был отличен от нуля. Матрицу $\boldsymbol{D}$ вычисляем из условия ортогональности: $\boldsymbol{D \times D^{-1} = E}$, где $\boldsymbol{E}$ - единичная матрица размерности $k \times k$. Обращение матриц и проверку линейной зависимости строк осуществляем в поле используемых в (1) операций сложения и умножения.

Повышение эффективности вычислений в многозначной логике на вычислительных средствах с двоичным кодирование данных осуществим путем использования булевой мультипликативной формы. Для булевой формы степенные операции зададим в виде булевых матриц, а в качестве операции умножения $\times$ выберем булеву конъюнкцию $\boldsymbol{\&}$. В этом случае многозначные переменные X_i степенной операцией преобразуются к булевым значениям. Тем самым вычисление (1) сводится к суммированию коэффициентов A_i, для которых $\boldsymbol{\theta_i(X)}$ не равны нулю. Минимизация мультипликативных форм осуществим путем выбора степенных операций. Количество обращаемых булевых матриц $N_B(k_t)$ размерности $k_t \times k_t$ может быть подсчитано по формуле:

$$N_B(k_t) = k_t\,!\left(2^{\frac{k_t(k_t-1)}{2}+1} - 1\right).$$

Получен эффективный алгоритм, необходимый для минимизации (1) и позволяющий построить произвольную обращаемую булеву матрицу по ее номеру.

Использованные источники

1. Малюгин В.Д. Параллельные логические вычисления посредством арифметических полиномов. - М.: Наука, 1997.
2. Выхованец В.С., Малюгин В.Д. Кратные логические вычисления //Автоматика и телемеханика. - 1998. - № 6. - С. 163-171.

Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Математические методы в образовании, науке и промышленности». Тирасполь, 1999. С. 52-53.

3. Выхованец В.С., Малюгин В.Д. Спектральные методы в логическом управлении //Тезисы докладов международной научно-технической конференции "Современные методы цифровой обработки сигналов в системах измерения, контроля, диагностики и управления", Минск, 1998.