Автоматика и телемеханика. 1998. № 6. С. 163-171.

© 1998 г. В.С. Выхованец, канд. техн. наук,
В.Д. Малюгин, д-р техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

КРАТНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Показано, что произвольная система булевых функций сводится к дискретной функции в арифметико-логической форме. Предлагается способ одновременного нахождения нескольких значений этой системы (на различных наборах аргументов) путем вычисления соответствующей арифметико-логической формы.

1. Введение

Существует большой класс задач, в которых логические вычисления составляют значительную долю операций. Для таких задач, как управление сложными объектами, распознавание образов, обработка изображений, принятие решений и т.д. основная проблема сводится к вычислению системы булевых функций. Логическое вычисление - процесс нахождения значения булевой функции на наборе ее аргументов. Под параллельными логическими вычислениями понимается процесс одновременного нахождения значений системы булевых функций на заданном наборе ее аргументов. Традиционная архитектура ЭВМ не предусматривает специализированных средств для логических вычислений. Поэтому наблюдается интерес к разработке новых методов логических вычислений и форм представления логических данных [1-9].

Наименее изученными остаются вопросы, связанные с реализацией кратных логических вычислений. Под кратными логическими вычислениями будем понимать процесс одновременного нахождения нескольких значений одной или системы булевых функций на разных наборах ее аргументов. Величина кратности q, очевидно, лежит в диапазоне от 1 до 2^n, где n – число аргументов, что означает, соответственно однократные и полнократные логические вычисления. Кратные вычисления возникают при параллельном управлении несколькими объектами, находящимися в разных физических состояниях. Другой важный случай – моделирование (воспроизведение) системы на нескольких наборах входных воздействий, например, при тестировании, а также решение логических уравнений.

Дадим формальную интерпретацию различных типов логических вычислений. Традиционную реализацию одной булевой функции вида $f(x) = y$ представим как операцию

$$f(x^{(i)}) = y^{(i)}, \quad i = \overline{0, 2^n - 1},$$

что означает нахождение значения функции $y^{(i)}$ при подстановке в последнюю аргумента $x^{(i)}$. Более сложный случай – параллельные логические вычисления над полиномом $p(x)=y$,

$$p(x^{(i)}) = \mathop{*}_{j=0}^{m-1} y_j^{(i)}, \quad i=\overline{0,2^n-1}$$

где * – разделительный знак, m – количество функций, описываемых полиномом p [1].

Кратные вычисления булевой функции означают операцию

$$p(\mathop{*}_{t=0}^{q-1} x^{(t)}) = \mathop{*}_{t=0}^{q-1} y^{(t)}.$$

И наконец, вычисление системы m функций с кратностью q, представленных полиномом $P(x)=Y$, означает операцию

$$P(\mathop{*}_{t=0}^{q-1} x^{(t)}) = \mathop{*}_{t=0}^{q-1} \mathop{*}_{j=0}^{m-1} y_j^{(t)}.$$

В данной статье излагается метод кратных вычислений системы булевых функций для вычислительных средств, построенных на базе арифметико-логического устройства. Суть подхода состоит в том, что система булевых функций представляется в алгебре, отражающей функциональные возможности вычислительного средства, находятся адекватные формы представления данных и строятся эффективные вычислительные процедуры.

2. Кратные вычисления функции

Известен метод кратных вычислений булевой функции [10], основанный на использовании поразрядных операций арифметико-логического устройства, суть которого заключена в следующем.

Натуральное число X представляется в двоичной позиционной системе счисления, т.е.

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i = (x_0\, x_1 \dots x_{n-1})_2, \quad x_i \in B = \{0,1\},$$

где x_i – i-й разряд n-разрядного представления X.

Определение 1. *Поразрядной операцией называется такая операция* $\circ$*, для которой* $\forall X, Y$

$$X \circ Y = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i\right) \circ \left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i 2^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \circ y_i) 2^i.$$

Автоматика и телемеханика. 1998. № 6. С. 163-171.

Пример 1. Пусть задана булева функция $f(x_0, x_1, x_2) = x_1 \vee x_0 \,\&\, x_2$, где & ($\vee$) – операция конъюнкции (дизъюнкции). Вычислить значения функции на наборах ее аргументов, представленных в Табл. 1.

Таблица 1. Наборы переменных

Набор	x_0	x_1	x_2
0	1	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1

Это соответствует подстановочным аргументам $\tilde{x}_0 = (101)_2$, $\tilde{x}_1 = (010)_2$, $\tilde{x}_2 = (011)_2$. Для трехкратного вычисления функции используем поразрядные операции и получаем:

$$f(\tilde{X}) = \tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_0 \,\&\, \tilde{x}_2 = (010)_2 \vee (101)_2 \,\&\, (011)_2 = (011)_2 .$$

Значение функции на наборе $X^{(i)}$ извлекаем из i-го разряда результата, т.е. $f(X^{(0)}) = 0$, $f(X^{(1)}) = f(X^{(2)}) = 1$. ♦

Достоинством рассмотренного метода является возможность изменять кратность вычислений от 1 до 2^n.

3. Параллельные вычисления системы функций

Метод, позволяющий выполнить однократные (параллельные) вычисления системы функций, основан на представлении вычисляемой системы в арифметико-логической форме. Предварительно дадим расширенное толкование арифметическому полиному из [1].

3.1. Арифметико-логический полином

Определение 0.2. *Арифметико-логическим полиномом n-й степени относительно логической операции $\circ \in \{\&, \vee, \oplus\}$ назовем выражение вида*

$$p(X) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (x_0^{i_0} \circ x_1^{i_1} \circ \ldots \circ x_{n-1}^{i_{n-1}}), \quad x_i^j = \begin{cases} c, & \text{при } j = 0; \\ x_i, & \text{при } j = 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_i \in Z$ – коэффициенты полинома, Z – множество целых чисел; $x_j \in B$ ($j = \overline{0, n-1}$) – независимые переменные; $i = (i_0\, i_1 \ldots i_{n-1})_2$ – двоичное представление числа i; $c = \overline{0 \circ 1}$ – константа, зависящая от выбора базиса.

Здесь $\oplus$ обозначает операцию неэквиваленции.

Теорема 1. *Любую булеву функцию* $f(X)$ *n переменных можно представить в виде арифметико-логического полинома (1).*

Доказательство. Действительно, система операций

$$\{1, x_i \circ x_j, x_i + x_j, x_i - x_j\} \tag{2}$$

является функционально полной в силу известной теоремы о функциональной полноте, т.к. каждая функция сигнатуры булевой алгебры $B_2 = \langle B, -, \&, \vee \rangle$, где $-$ – операция отрицания, может быть выражена через операции системы (2) в соответствии с выражениями из Табл. 2. ♦

Далее будем именовать базис (2) в зависимости от логической операции, участвующей в его формировании.

Таблица 2. Выражения для операций базисов

Базис	Отрицание	Конъюнкция	Дизъюнкция
Конъюнктивный	$1 - x_i$	$x_i \& x_j$	$x_i + x_j - x_i \& x_j$
Дизъюнктивный	$1 - x_i$	$x_i + x_j - x_i \vee x_j$	$x_i \vee x_j$
Неэквиваленции	$1 - x_i$	$\frac{1}{2}(x_i + x_j - x_i \oplus x_j)$	$\frac{1}{2}(x_i + x_j - x_i \oplus x_j)$

3.2. Дискретное ортогональное преобразование

Приведем способ конструирования арифметико-логического полинома относительно операций & и $\vee$ по известному вектору значений $\mathbf{F} = [f(0) f(1) \ldots f(2^n - 1)]^T$ булевой функции на основе дискретного ортогонального преобразования [7].

Из коэффициентов a_i полинома (1) составим вектор коэффициентов $\mathbf{A} = [a_0\, a_1 \ldots a_{2^n - 1}]^T$. Тогда пара ортогонального преобразования в базисе $\mathbf{D}_{2^t}$ определяет связь векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{F}$ следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{D}_{2^t} \times \mathbf{A}; \\ \mathbf{A} = \mathbf{Q}_{2^t} \times \mathbf{F}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{D}_{2^t}$ и $\mathbf{Q}_{2^t}$ – матрицы прямого и обратного преобразования соответственно, $\times$ – операция умножения матриц. Знак T обозначает операцию транспонирования матрицы.

Матрица прямого преобразования $\mathbf{D}_{2^t}$ состоит из характеристических векторов функций $\theta_i(X) = x_0^{i_0} \circ x_1^{i_1} \circ \ldots \circ x_{n-1}^{i_{n-1}}$, представляющих логическую часть полинома (1). Для построения $\mathbf{D}_{2^t}$ используются следующие рекуррентные правила,

$$\mathbf{D}_{2^0} = c, \quad \mathbf{D}_{2^t} = \left[\begin{array}{c:c} c \circ \mathbf{D}_{2^{t-1}} & 0 \\ \hdashline c \circ \mathbf{D}_{2^{t-1}} & \mathbf{D}_{2^{t-1}} \end{array}\right], \quad c = \begin{cases} c^{\&} = 1; \\ c^{\vee} = 0; \\ c^{\oplus} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $c^{\&}$, $c^{\vee}$ и $c^{\oplus}$ – константы, определяющие базис дискретного преобразования соответственно конъюнктивный, дизъюнктивный и неэквиваленции.

Для конъюнктивного базиса матрица $\mathbf{Q}_{2^t}^{\&}$ размерности $2^t \times 2^t$ определяется по рекуррентному правилу

$$\mathbf{Q}_{2^0}^{\&} = 1, \quad \mathbf{Q}_{2^t}^{\&} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{Q}_{2^{t-1}}^{\&} & 0 \\ \hdashline -\mathbf{Q}_{2^{t-1}}^{\&} & \mathbf{Q}_{2^{t-1}}^{\&} \end{array}\right], \tag{5}$$

а матрица $\mathbf{Q}_{2^t}^{\vee}$ дизъюнктивного базиса – по правилу

$$\mathbf{G}_{2^0} = [-1], \quad \mathbf{G}_{2^t} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & \mathbf{G}_{2^{t-1}} \\ \hdashline \mathbf{G}_{2^{t-1}} & -\mathbf{G}_{2^{t-1}} \end{array}\right], \quad \mathbf{Q}_{2^t}^{\vee} = \mathbf{G}_{2^t} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Пример 2. Представить функцию $f(X) = (x_0 \,\&\, x_2) \oplus x_1$ в виде арифметико-логического полинома в дизъюнктивном базисе. Вектор значений функции $f(X)$ равен $\mathbf{F} = [f(0) f(1) \ldots f(7)] = [1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1]^T$. Получим вектор коэффициентов $\mathbf{A}$ в соответствии с (3) и (6):

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_{2^3}^{\vee} \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

В итоге имеем:

$$p(X) = \sum_{i=0}^{7} a_i (x_2^{i_2} \vee x_2^{i_1} \vee x_0^{i_0}) = 1 + x_1 + x_2 \vee x_0 - 2(x_2 \vee x_1 \vee x_0). \ \blacklozenge$$

3.3. Представление систем булевых функций

Теорема 1 справедлива для систем булевых функций [6]. Представление системы булевых функций в виде арифметико-логического полинома осуществляется с помощью того же ортогонального преобразования (3), где вместо вектора значений функции используется вектор значений системы функций.

Пример 3. Определить арифметико-логический полином для следующей системы булевых функций:

$$\begin{cases} f_0(X) = (\bar{x}_0 \,\&\, \bar{x}_2) \oplus x_1, \\ f_1(X) = x_1 \vee (x_0 \,\&\, x_2), \\ f_2(X) = x_0 \,\&\, (x_1 \vee x_2), \\ f_3(X) = x_2 \,\&\, \bar{x}_1. \end{cases} \tag{7}$$

Используя дискретное преобразование (3) в дизъюнктивном базисе, получим арифметико-логический полином, соответствующий заданной системе функций:

$$P(X) = 1 + 4x_0 - 7x_1 + 2(x_1 \vee x_0) + x_2 \vee x_0 + 14(x_2 \vee x_1) - 8(x_2 \vee x_1 \vee x_0)\,.$$

Вычислим полученный полином, например, в точке $(101)_2$. В этом случае $P(X) = (0111)_2$, что соответствует следующим значениям функций исходной системы: $f_0(X) = 0$, $f_1(X) = f_2(X) = f_3(X) = 1$. ♦

Подчеркнем, что в противоположность методу кратных вычислений, где получаем значения одной функции на нескольких наборах переменных, при параллельных вычислениях над арифметическим полиномом вычисляем произвольное количество функций, но на одном наборе.

4. Кратные вычисления систем функций

Попытаемся перенести кратные логические вычисления на систему булевых функций.

4.1. Арифметико-логический полином для кратных вычислений

Пусть требуется вычислить с кратностью q систему m функций $F(X)$ булевой алгебры B_2 от n независимых переменных $X = (x_0\, x_1 \ldots x_{n-1})$:

$$F(X) = \big(f_0(X)\, f_1(X) \ldots f_{m-1}(X)\,\big). \tag{8}$$

Представим функции системы (8) в виде арифметико-логических полиномов (1) в одном из базисов (2)

$$p_j(X) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij}(x_0^{i_0} \circ x_1^{i_1} \circ \ldots \circ x_{n-1}^{i_{n-1}}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij}\theta_i(X)\,, \tag{9}$$

где $j = \overline{0, m-1}$; a_{ij} – i-й коэффициент арифметико-логического полинома для j–й функции, $\theta_i(X) = x_0^{i_0} \circ x_1^{i_1} \circ \ldots \circ x_{n-1}^{i_{n-1}}$ – логическая часть полинома.

Запишем (9) для всех q наборов $X^{(t)}$, $t = \overline{0, q-1}$:

$$p_j(X^{(t)}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij}\theta_i(X^{(t)})$$

и объединим полученные выражения в виде взвешенной суммы qm составляющих, используя весовую функцию двух переменных вида $2^{\varphi(t,j)}$, степень которой, заданная в области $D \subset N^2$, N – множество натуральных чисел, удовлетворяет условию:

$$\sum_{u\in D}\sum_{v\in D}\delta(\varphi(u)-\varphi(v)) = |D|^2, \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0; \\ 0, & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

В результате объединения получим арифметико-логический полином для q-кратных вычислений системы функций (8):

$$P(\widetilde{X}) = \sum_{t=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{m-1} 2^{\varphi(t,j)} \left\{ \sum_{i=0}^{2^{n-1}} a_{ij}\theta_i(X^{(t)}) \right\}, \tag{10}$$

где $\widetilde{X} = (X^{(0)}X^{(1)}\ldots\ X^{(q-1)})$ – подстановочное множество из qm переменных.

Степень весовой функции φ задает размещение значений $p_j(X^{(t)})$ в разрядной сетке результата. Номер разряда, в котором располагается значение j-й функции p_j от t-го набора переменных $X^{(t)}$ равен $\varphi(t, j)$. Выбор подходящей весовой функции 2^{φ} позволяет по-разному разместить значения функций системы (8).

4.2. Вычисления в базисе поразрядных операций

Рассмотрим один важный случай. С целью использования поразрядных логических операций потребуем, чтобы степень весовой функции φ двух переменных представлялась как произведение двух функций от одной переменной, что эквивалентно $\varphi(t, j) = \mu(t) + \nu(j)$. В этом случае выражение (10) может быть записано как

$$P(\widetilde{X}) = \sum_{t=0}^{q-1} 2^{\mu(t)} \sum_{j=0}^{m-1} 2^{\nu(j)} \sum_{i=0}^{2^{n-1}} a_{ij}\theta_i(X^{(t)}).$$

Из последнего после тождественных преобразований получим:

$$P(\widetilde{X}) = \widetilde{a}_0 + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \widetilde{a}_i \widetilde{\theta}_i(\widetilde{X}), \tag{11}$$

где

$$\widetilde{x}_i^{\,j} = \begin{cases} \widetilde{C}, & \text{при } j = 0; \\ \widetilde{x}_i, & \text{при } j = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \widetilde{C} = \sum_{t=0}^{q-1} 2^{\mu(t)}; \\ \widetilde{x}_i = \sum_{t=0}^{q-1} 2^{\mu(t)} x_i^{(t)}, \end{cases}$$

$$\widetilde{\theta}_i(\widetilde{X}) = \widetilde{x}_0^{i_0} \circ \widetilde{x}_1^{i_1} \circ \ldots \circ \widetilde{x}_{n-1}^{i_{n-1}},$$

Автоматика и телемеханика. 1998. № 6. С. 163-171.

$$\tilde{a}_0 = \left(\sum_{t=1}^{q-1} 2^{\mu(t)}\right) \sum_{j=0}^{m-1} 2^{\nu(j)} a_{0j}, \quad \tilde{a}_i = \sum_{j=0}^{m-1} 2^{\nu(j)} a_{ij} \ (i = \overline{1, 2^n - 1}).$$

Выражение (11) представляет собой арифметико-логический полином (1), заданный относительно поразрядной логической операции $\circ$, который описывает кратные вычисления системы функций (8).

Пример 0.4. Пусть задана система булевых функций (7). Решить систему уравнений $F(X) = Y$.

Представим функции системы (7) в виде арифметико-логических полиномов (1) в дизъюнктивном базисе:

$$\begin{cases} p_0(X) = 1 + x_1 + x_2 \vee x_0 - 2(x_2 \vee x_1 \vee x_0), \\ p_1(X) = x_1 \vee x_0 + x_2 \vee x_1 - x_2 \vee x_1 \vee x_0, \\ p_2(X) = x_0 + x_2 \vee x_1 - x_2 \vee x_1 \vee x_0, \\ p_3(X) = -x_1 + x_2 \vee x_1. \end{cases}$$

Для решения системы уравнений необходимо выполнить полнократные вычисления исходной системы, т.е.. при $q = 8$, $m = 4$, $n = 3$.

Выберем степень весовой функции $\varphi(t, j) = \mu(t) + \nu(j)$, где $\mu(t) = tm$ и $\nu(j) = j$, что обеспечит смежное расположение значений функций на одном и том же наборе и при последовательном расположении наборов в разрядной сетке, а также независимость коэффициентов a_i $(i > 0)$ от кратности вычисления q.

Конструируя полином в соответствии с (11), получим:

$$P(\tilde{X}) = 286331153 + 4\tilde{x}_0 - 7\tilde{x}_1 + 2(\tilde{x}_0 \vee \tilde{x}_1) + \tilde{x}_0 \vee \tilde{x}_2 + 14(\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2) - 8(\tilde{x}_0 \vee \tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2).$$

Для полнократных вычислений необходимо вычислить $P(\tilde{X})$ при

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= (0000\,|\,0001\,|\,0000\,|\,0001\,|\,0000\,|\,0001\,|\,0000\,|\,0001)_2, \\ \tilde{x}_1 &= (0000\,|\,0000\,|\,0001\,|\,0001\,|\,0000\,|\,0000\,|\,0001\,|\,0001)_2, \\ \tilde{x}_2 &= (0000\,|\,0000\,|\,0000\,|\,0000\,|\,0001\,|\,0001\,|\,0001\,|\,0001)_2, \end{aligned}$$

в результате чего получим

$$P(\tilde{X}) = (0001\,|\,0000\,|\,0010\,|\,0111\,|\,1000\,|\,1110\,|\,0011\,|\,0111)_2.$$

Выделяя последовательно по 4 разряда результата и сравнивая полученные числа с заданным значением Y, например с $Y = (0111)_2 = 7$, находим, что $F(X) = 7$ при $X \in \{3, 7\}$, т.е. при $x_2 = 0$, $x_1 = x_0 = 1$ и при $x_2 = x_1 = x_0 = 1$. ♦

5. Процедура кратных вычислений

Известны несколько путей вычисления полинома (1) в конъюнктивном базисе: непосредственное вычисление по формуле [1] и вычисления по преобразованному полиному, когда последний предварительно сведен в композицию линейных полиномов [2]. В работе [9] приведены процедуры логических вычислений при параллельном вычислении конъюнкций. В [11] рассмотрен замкнутый класс функций (2^k-1)-значной логики и приведены процедуры кратных вычислений арифметико-логического полинома (11) в конъюнктивном базисе.

Рассмотрим вычисление полинома (11) непосредственно по формуле при $\mu(t)=tm$, $\nu(j)=j$. Так как в произвольном полиноме некоторые из коэффициентов нулевые, то представим полином в виде:

$$P(\widetilde{X})=\widetilde{a}_0+\sum_{i=1}^{s}\widetilde{a}_i(\widetilde{x}_{i_1}\circ\widetilde{x}_{i_2}\circ\ldots\circ\widetilde{x}_{i_t})=\sum_{i=1}^{s}\widetilde{a}_i\widetilde{\theta}_i\,, \tag{12}$$

где $s<2^n$ – вычислительная сложность полинома, $\widetilde{\theta}_i=\widetilde{x}_{i_1}\circ\widetilde{x}_{i_2}\circ\ldots\circ\widetilde{x}_{i_t}$.

Вычисление полинома (11) можно выполнить по следующей рекуррентной процедуре:

$$P_0(\widetilde{X})=\widetilde{a}_0\,,\quad P_i(\widetilde{X})=P_{i-1}(\widetilde{X})+\widetilde{a}_i\widetilde{\theta}_i\ \ (i=\overline{1,s}),\quad P(\widetilde{X})=P_s(\widetilde{X})\,.$$

Для определения времени вычисления используем оценку значений коэффициентов полинома из [12]:

$$\widetilde{a}_i^p\in[-2^{p-1}(2^m-1),2^{p-1}(2^m-1)]\,, \tag{13}$$

где $\widetilde{a}_i^p$ – коэффициент, стоящий при конъюнкции (дизъюнкции) p переменных, $p=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,C_n^p}$, C_n^p – число сочетаний из n элементов по p.

Вычисление $\widetilde{\theta}_i$ потребует в среднем

$$\frac{s}{2^n-1}\sum_{p=1}^{n}(p-1)C_n^p$$

тактов работы r-разрядного арифметико-логического устройства, умножение $\widetilde{a}_i$ на $\widetilde{\theta}_i$ выполняется не более чем $n+m$ тактов, а сложение $\widetilde{a}_i\widetilde{\theta}_i$ с текущим значением полинома – за s тактов. Таким образом, общее время кратных вычислений системы m логических функций от n переменных составляет

$$T=s\,(1+\frac{n+m}{2^n-1}\sum_{p=1}^{n}(p-1)C_n^p)$$

тактов и не зависит от кратности вычислений q.

Если разрядность r меньше, чем qm, введем в последнее выражение поправочный коэффициент и получим:

$$T = s \left]\frac{qm}{r}\right[\left(1 + \frac{n+m}{2^n - 1}\sum_{p=1}^{n}(p-1)C_n^p\right),$$

где $]x[$ – наименьшее целое, равное или большее x.

Объем памяти в битах, необходимый для хранения коэффициентов полинома (12) с учетом (13) можно оценить как

$$M = \sum_{i=1}^{s}]\log_2(2\,|a_i|_{\max} + 1)[\le s\left(m + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p\right).$$

В предложенной схеме вычислений объем памяти минимален по отношению к различному выбору весовых функций $2^{\varphi(t,j)}$.

Заключение

Алгебра арифметических и поразрядных логических операций, которая является по существу обобщенной математической моделью арифметико-логического устройства, а арифметико-логический полином – адекватная этой модели форма представления дискретной обработки данных.

Выбор различных весовых функций при построении арифметико-логических полиномов позволяет получать различные процедуры кратных логических вычислений и представлять результат вычислений в форме, удобной для последующего использования.

В предложенной процедуре кратных вычислений системы булевых функций объем памяти, необходимый для представления коэффициентов арифметико-логического полинома, и время вычислений не зависят от кратности вычислений.

Эффективность процедуры определяется более полным использованием разрядной сетки в сравнении с повторными вычислениями другими известными методами. В случае недостаточной разрядности арифметико-логического устройства ($r < k \cdot m$) время вычислений растет пропорционально кратности.

Таким образом, предложенный подход удовлетворяет естественным техническим ограничениям и позволяют интенсифицировать использование вычислительных средств.

Автоматика и телемеханика. 1998. № 6. С. 163-171.

Литература

1. *Малюгин В. Д.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // Автоматика и телемеханика. 1982. № 4. С. 84-93.

2. *Малюгин В. Д.* Реализация кортежей булевых функций посредством линейных арифметических полиномов // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 114-122.

3. *Ефремов В. Д., Кузьмин А. А., Степанов В. А.* Вычисление логических функций с использованием преобразования Радемахера // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 102-113.

4. *Артюхов В. Л., Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4. С. 138-147.

5. *Шмерко В. П.* Синтез арифметических форм булевых функций посредством преобразования Фурье // АиТ. 1989. № 5. С. 134-142.

6. *Малюгин В. Д., Кухарев Г. А., Шмерко В. П.* Преобразования полиномиальных форм булевых функций. М.: ИПУ. Препринт, 1986.

7. *Кухарев Г. А., Шмерко В. П., Янушкевич С. Н.* Техника параллельной обработки бинарных данных на СБИС. Минск: Вышэйшая школа, 1991.

8. *Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация систем булевых функций с использованием линейных арифметических полиномов // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 135-151.

9. *Малюгин В. Д, Соколов В. В.* Интенсивные логические вычисления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4. С. 160-167.

10. *Лапкин Л. Я.* О векторной программной реализации логических функций // Автоматика и телемеханика. 1983, № 3. С. 120-128.

11. *Выхованец В. С.* Многократные параллельные логические вычисления // Вестник Приднестровского университета, 1997. № 2. С. 64-74.

12. *Выхованец В. С.* Многократные параллельные логические вычисления // Материалы Всероссийской конференции "Информационно-управляющие системы и специализированные вычислительные устройства для обработки и передачи данных". Махачкала. 1996. С. 105-106.