Труды 2-й Международной научно-технической конференции «Современные методы цифровой обработки сигналов в системах измерения, контроля, диагностики и управления" (OS'98). Минск, 1998. С. 56-59.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЛОГИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ

В.С. Выхованец, В.Д. Малюгин
(Республика Молдова, Тирасполь; Россия, Москва)

Введение

Имеется круг задач, решение которых основывается на обработке бинарных и многозначных данных. К таким задачам можно отнести логическое управление, дискретную оптимизацию, обработку сигналов и изображений, распознавание образов и прогнозирование, принятие решений, моделирование дискретных устройств и т.д. Логическая обработка формализуется в алгебре логики и представляется в виде системы логических функций, заданных на общем множестве аргументов:

$$f_j(X)=f_j(X_{n-1},\ \ldots,\ X_1,\ X_0),\quad j=\overline{(0,\ q-1)}.$$

Современное состояние информационной технологии отражает неадекватность используемых методов обработки данных структуре вычислительных средств [1]. В связи с чем все большее применение при логических вычислениях находят спектральные методы [2]. Наименее изученными остаются вопросы, связанные с расширением форм представления логических данных с учетом особенностей используемого вычислительного средства [3]. Основываясь на ранее полученных результатах [4-10], рассмотрим обобщеную методику синтеза полиномиальных форм для логических вычислений. Суть подхода состоит в том, что система функций представляется в форме, отражающей операционные возможности вычислительного средства и синтезируется в расширенном базисе операций и при смешанной значности переменных и функций.

Синтез полиномиальных форм

Известные методы логических вычислений своей структурой повторяют формульное описание функции. Не ограничивая общности, произвольную логическую функцию представим в полиномиальном виде:

$$P_j(X)=\sum_{i=0}^{k^n-1} A_{ij}\left(C_i\delta_n X_{n-1}^{i_{n-1}}\delta_{n-1}\ \ldots\ \delta_0 X_0^{i_0}\right)=\sum_{i=0}^{k^n-1} A_{ij}\theta_i(X),$$

где k - значность алгебры логики; A_{ij} - коэффициенты формы; C_i -

произвольные константы; δ_t – логические операции; $X_i^{i_t}$ – переменная X_i в логической степени i_t; $i=(i_{n-1}, \ldots, i_0)_k$ – k-ичное представление числа i; $\theta_i(X)$ – полиномиальные ортогональные функции. Для синтеза полиномиальных форм используем дискретное ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} \mathbf{A}=\mathbf{D}\times\mathbf{F}; \\ \mathbf{F}=\mathbf{D}^{-1}\times\mathbf{A}, \end{cases}$$

где **F** – характеристический вектор функции, **A** – вектор коэффициентов формы, **D** и $\mathbf{D}^{-1}$ – матрицы прямого и обратного преобразования размерности k^n x k^n. Последние получаем следующим образом:

1). Задаем ядро преобразования, которое определяет степенные операции и соответствующиематрицы $\mathbf{W}_t$ с элементами

$$w_t(i,\ j)=i^j,\quad (i,\ j=\overline{0,\ k-1},\ t=\overline{0,\ n-1}),$$

где i (j) – номер строки (столбца). Строки (столбцы) матрицы $\mathbf{W}_t$ должны быть линейно независимы;

2). Строим матрицу $\mathbf{D}^{-1}$ по рекуррентному правилу:

$$\mathbf{G}_0=\mathbf{W}_0,\quad \mathbf{G}_{t+1}=\mathbf{W}_t\otimes_t\mathbf{G}_t,\quad \mathbf{D}^{-1}=\mathbf{C}_n\delta_n\mathbf{G}_{n-1},\ (t=\overline{0,\ n-2}),$$

где $\otimes_t$ – обобщенная операция кронекеровского произведения; $\mathbf{C}_n$ – матрица констант, состоящая из k^n одинаковых строк k^n произвольных констант. Операцию обобщенного кронекеровского произведения определим так:

$$\mathbf{W}_t\otimes_t\mathbf{G}_t=\left[\begin{array}{c|c|c|c} w_t(0,0)\delta_t\mathbf{G}_t & w_t(0,1)\delta_t\mathbf{G}_t & \cdots & w_t(0,I)\delta_t\mathbf{G}_t \\ \hline w_t(1,0)\delta_t\mathbf{G}_t & w_t(1,1)\delta_t\mathbf{G}_t & \cdots & w_t(1,I)\delta_t\mathbf{G}_t \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline w_t(I,0)\delta_t\mathbf{G}_t & w_t(I,1)\delta_t\mathbf{G}_t & \cdots & w_t(I,I)\delta_t\mathbf{G}_t \end{array}\right],$$

где I - логическая единица алгебры, I=k-1. Выбор операций и их последовательности не должны вести к линейной зависимости срок (столбцов) $\mathbf{G}_t$, а константы c_i задаем так, чтобы определитель $\mathbf{D}^{-1}$ был отличен от нуля;

3). Матрицу D вычисляем из условия ортогональности: $\mathbf{D}\mathrm{x}\mathbf{D}^{-1}=\mathbf{E}$, где **E** – единичная матрица размерности k^n x k^n.

Синтез при смешанной значности

На практике возможны случаи, когда объект управления описывается совокупностью функций с разной (смешанной) значностью переменных и функций. Для описания системы со смешанной значностью переменных полиномом принимает вид

$$P_j(X)=\sum_{i=0}^{(k_{n-1}\cdot\ldots\cdot k_0)-1} A_{ij}\left[C_i\delta_n X_{n-1}^{i_{n-1}}\delta_{n-1}\ \ldots\ \delta_0 X_0^{i_0}\right],$$

ядро преобразования строится с учетом значностей k_i переменных X_i, а операции δ_j задаются при различной значности операндов. Ортогональное объединение функций P_j со значностями k_{fj}. осуществляем с помощью производящейфункции:

$$P(X)=\sum_{j=0}^{q-1} P_j(X)\prod_{t=0}^{j-1} k_{f_t},\qquad P_j(X)\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ k_{f_j}-1\}.$$

Мультипликативные формы

Для уменьшения сложности формирования базиса использованы мультипликативные формы, синтез которых основан на свойстве обращаемости кронекеровского произведения относительно некоторой мультипликативной операции, совпадающей по определению с операцией умножения в некоторой области определения. В этом случае обращение кронекеровского произведения матриц получают путем кронекеровского произведения обратных матриц.

Повышение эффективности вычислений в многозначной логике на вычислительных средствах с двоичным кодирование данных достигнуто путем использования булевой, Уолша и обобщенной мультипликативных форм. Для булевой формы степенные операции задаются в виде булевых матриц; для формы Уолша - в виде матриц, состоящих из -1 и 1; для обобщенной формы - из -1, 0 и 1. Минимизацию мультипликативных форм осуществляем путем выбора степенных операций. Самой эффективной оказалась обобщенная форма, для которой мощность множества степенных операций значительно превосходит аналогичную мощность для булевой формы и формы Уолша.

Эффективность аналитической конструкции

Эффективность аналитической конструкции у определим отношением времени вычисления полиномиальных ортогональных функции $\theta_i(X)$ в булевой алгебре к времени вычисления таких функций при смешанной значности переменных. Для произвольной таблицы логических данных получены оптимальные аналитические конструкции, задаваемые при смешанной значности переменных:

Длина таблицы	Значности переменных kj	У
8	(2, 2, 2)	1.000
9	(3, 3)	1.454
10	(2, 5)	1.548
11	(2, 2, 3)	1.200
12	(2, 2, 3)	1.200
13	(2, 7)	1.066
14	(2, 7)	1.066
15	(2, 2, 2, 2)	1.000
16	(2, 2, 2, 2)	1.000
17	(2, 3, 3)	1.493
18	(2, 3, 3)	1.493
19	(2, 2, 5)	1.555
20	(2, 2, 5)	1.555
21	(3, 7)	1.317

Кратные логические вычисления

Под кратными логическими вычислениями будем понимать процесс одновременного нахождения нескольких значений системы функций на разных наборах ее аргументов. Кратные вычисления возникают при параллельном управлении несколькими одинаковыми объектами, находящимися в разных физических состояниях; при моделировании (воспроизведении) системы на нескольких входных воздействиях, например при тестировании и технической диагностике; в системах управления, где требуется быстрая реакция на изменение внешних условий. В последнем случае можно с упреждением просчитать нужные действия на возможных (вероятных) входных наборах, например, находящихся на единичном расстоянии по Хеммингу, и при поступлении нового набора уже иметь требуемый результат.

Для синтеза форм кратных вычислений полиномы записываем для каждой функций и для всех наборов $X(^r)$, $(r=\overline{0, m-1})$:

$$P_j(X^{(r)})=\sum_{i=0}^{k^n-1} A_{ij}\left[X_{(n-1)r}^{i_{n-1}}\delta_{n-1}\ldots\delta_0 X_{0r}^{i_0}\right],$$

а потом объединяем в виде взвешенной суммы с коэффициентами, порожденными весовой функцией φ, задающей размещение значений функций на разных наборах в разрядной сетке:

$$P(\tilde{X})=\sum_{r=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{q-1}k^{\varphi(r,j)}\left\{\sum_{i=0}^{k^n-1}A_{ij}\theta_i(X^{(r)})\right\}.$$

После разделения переменных весовой функции: $\varphi(r,j)=\mu(r)+\upsilon(j)$, получим обобщенную полиномиальную форму кратных вычислений:

$$P(\tilde{X})=\sum_{i=0}^{k^n-1}\left(\sum_{j=0}^{q-1}k^{\upsilon(j)}a_{ij}\right)\cdot\left\{\sum_{r=0}^{m-1}k^{\mu(r)}\theta_i(X^{(r)})\right\}.$$

Использование поразрядных (векторных) операций позволяет получить более компактное представление:

$$P(\tilde{X})=\sum_{i=0}^{k^n-1}\tilde{A}_i\left(\tilde{X}_{n-1}^{i_{n-1}}\delta_{n-1}\ldots\delta_0\tilde{X}_0^{i_0}\right)=\sum_{i=0}^{k^n-1}\tilde{A}_i\theta_i(\tilde{X}).$$

где коэффициенты $\tilde{A}_i$ иподстановочные вектора $\tilde{X}_i$ находим так:

$$\tilde{A}_i=\sum_{j=0}^{q-1}k^{\upsilon(j)}A_{ij},\quad \tilde{X}_j=\sum_{r=0}^{m-1}k^{\mu(r)}X_{jr}.$$

Форма для кратных вычислений, требующая наименьшего объема памяти для хранения коэффициентов Aj, синтезируется при следующем задании весовых функций: $\mu(r)=q*r$, $\upsilon(j)=j$.

Заключение

Новые постановки задач в логическом управлении выдвинули в число приоритетных проблему оптимального по ряду критериев отображения решаемой задачи в структуру вычислительного средства. В настоящей работе изложены основные результаты по обобщенной методике синтеза полиномиальных форм и показано, что синтез форм возможен как в расширенном базисе операций, так и при смешанной значности переменных и функций.

Для уменьшения трудоемкости синтеза и повышения эффективности логической обработки на вычислительных средствах с двоичным кодированием данных использованы мультипликативные формы, минимизация которых осуществлена путем подбора степенных операций. Предложены также минимальные формы для кратных вычислений, позволяющие реализовать логическую обработку сразу (одновременно) на нескольких входных наборах.

Применение спектральных методов при синтезе форм для логических вычислений позволяет повысить эффективность использования современных вычислительных средств.

Труды 2-й Международной научно-технической конференции «Современные методы цифровой обработки сигналов в системах измерения, контроля, диагностики и управления" (OS'98). Минск, 1998. С. 56-59.

Литература

1. Залмазон Л.А. Перобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.

2. Кухарев Г.А., Шмерко В.П., Янушкевич С.Н. Новые возможности дискретного преобразования Фурье для аналитического описания бинарных и многозначных данных // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение / ВЦ АН СССР. – М: Наука, 1991. – Вып. 3. – С. 112-147.

3. Кухарев Г.А., Шмерко В.П., Янушкевич С.Н. Техника параллельной обработки бинарных данных на СБИС. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – 226 с.

4. Малюгин В.Д. Параллельные логические вычисления посредством арифметических полиномов. – М.: Наука, 1997. – 256 с.

5. Выхованец В.С. Дискретное преобразование Фурье и его применение при логических вычислениях / Приднестровский государственный университет. – Тирасполь, 1997. – 1.5 с. - Деп. в ВИНИТИ 5.6.97, № 1852-В97.

6. Выхованец В.С. Многократные параллельные логические вычисления // Информационно-управляющие системы и специализированные вычислительные устройства для обработки и передачи данных: Труды Всероссийской конференции. – Махачкала, 1996. – С. 105-106.

7. Выхованец В.С. Кратные логические вычисления и их применение в управлении, обработке информации и других областях / Приднестровский государственный университет. – Тирасполь, 1997. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ 5.6.97, № 1851-В97.

8. Выхованец В.С. Многократные параллельные логические вычисления // Вестник Приднестровского университета. – 1997. – № 2. - С. 64–74.

9. Выхованец В.С., Малюгин В.Д. Кратные логические вычисления // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 6. – 163-171.

10. Выхованец В.С. Кратные логические вычисления и их применение при моделировании дискретных объектов / Автореферат дис. канд. техн. наук. - Москва: Институт проблем управления, 1998. - 23 с.